Université de M'sila	Correction d'interrogation	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3		Durée : 1 heure

Barème

Correction d'exercice : 1 (3pts)

1 On étudie la nature des séries numériques suivantes :

1 — a Si $u_n = e^{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}$. Alors, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0.$

Donc, la série numériques $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

b Pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)}$. on utilise le théorème de comparaison, donc,

0.5 — on a, $\forall n \in \mathbb{N}^* : n + \ln n \geq n,$ par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)} \leq \dfrac{1}{n^2}.$

0.5 — Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, car $\alpha = 2 > 1.$ Donc, d'après théorème précédent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge.

c Nous appliquons le critère de D'Alembert, on obtient,

0.5 — $$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

0.5 — $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ converge.

Remarque : Pour la question 2, on peut appliquer le théorème d'équivalence, donc,

0.5 — $$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n(n+\ln n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}} = 1.$$

0.5 — Alors la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2},$ $(\alpha = 2 > 1)$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ ont la même nature.

Donc, d'après théorème précédent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge.

Barème

Correction d'exercice : 2 (5pts)

Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n}.$

1 Montrons que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

0.5 — a Pour $x = 0,$ on a $f_n(0) = 0.$ Donc, la sérié $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge et de somme nulle.

1 — b Pour $x \neq 0$ on a : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k = x \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^k = x \times \dfrac{1 - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{x^2+1}}.$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{x^2+1}{x}.$

0.5	Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction S telle que,
	$S(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad x \neq 0 \end{cases}$
	2 La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
1	Comme $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} S_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} S_n = -\infty$. Alors, S n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
0.5	Donc, $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément vers S sur $\mathbb{R}$.
	3 Pour la convergence absolue de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ il faut vérifier que la série $\sum_{n\geq 0} \lvert f_n\rvert$ convergence simplement sur $\mathbb{R}$. En effet,
0.5	**a** Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$. Donc, la série $\sum_{n\geq 0} \lvert f_n\rvert$ converge et de somme nulle.
0.5	**b** Pour $x \neq 0$ on a : $T_n = \sum_{k=0}^{n} \lvert f_k\rvert = \lvert x\rvert \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^k = \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert}$.
	D'où la série $\sum_{n\geq 0} \lvert f_n\rvert$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction T telle que,
0.5	$T(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert} & : \quad x \neq 0 \end{cases}$
	Par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}$.
Fin	**Dr. D. Bouafia** **14 janvier 2024**