Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
L2 Mathématiques	Examen Final	**Année universitaire : 2023/2024**
Module : Analyse 3	**Troisième semestre**	**Durée : 1 h 30 m**

Barème

Exercice : 1 7pts

Soient la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et S_n sa somme partielle où $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2.5 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis simplifier S_n.

3 2 Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et donner sa somme S.

1.5 3 Par un changement de variable approprié, déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Barème

Exercice : 2 7pts

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.

2.5 1 Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

2.5 2 Soit $a > 0$ un réel, montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

2 3 Est ce que la convergence est uniforme sur $]0, +\infty[$. Justifier votre réponse **?**

Barème

Exercice : 3 6pts

Soient la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$ et S sa somme.

2 1 Déterminer le rayon R et le domaine D de convergence de cette série.

1.5 2 Montrer que S est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$.

2.5 3 Calculer S et déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$.

Indication : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Fin **14 janvier 2024** **Bon Courage**