

Université de M'sila	 Correction d'examen Session normal	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3		Durée : 1 h 30m

Barème

Correction d'exercice : 1 7pts

Soit la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et S_n sa somme partielle, alors,

0.5 **1** **a** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

2 **b** $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

0.5 **2** La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\Leftrightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe et finie.

1.5 Comme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

1 Donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et converge et sa somme $S = 1$.

0.5 **3** On faisant le changement de variable $k = n + 1$. Alors, d'après question 2, on trouve,

1 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Barème

Correction d'exercice : 2 7pts

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.

1 La convergence simple de $(f_n)_{n \geq 0}$.

1 **a** Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la suite $(f_n(0))_{n \geq 0}$ est divergente.

1 **b** Pour $x > 0$, nous avons, $f_n(x) = ne^{-n^2x^2} = \frac{n}{e^{n^2x^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

0.5 Donc la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$ sur $]0, +\infty[$.

2 La convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[a, +\infty[$, ($a > 0$).

1 Sur $[a, +\infty[$ les fonctions f_n , ($n \in \mathbb{N}$) sont positives et décroissantes, donc,

1 $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{e^{n^2a^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

0.5 Donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

3 Sur $]0, +\infty[$ nous avons, pour $x = \frac{1}{n}$,

1.5 $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

0.5 Alors, la convergence n'est donc pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Barème

Correction d'exercice : 3 6pts

Soit la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$ et S sa somme.



1 a) D'après la règle d'Hadamard, on a :

0.5
$$a_n = \frac{n}{n+1} \text{ et le rayon } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

C'est à dire la série converge pour tout $|x| < 1$.

b) Pour déterminer le domaine D , il faut examiner le cas $|x| = 1$.

0.5 Donc, pour $x = 1$, on a la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1}$ diverge, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

0.5 Si $x = -1$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ diverge, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = \pm 1$ (n'existe pas).

0.5 D'où, $D =] - 1, 1[$.

0.5 2) Les fonctions $x \mapsto \frac{n}{n+1} x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur $] - 1, 1[$,

0.5 D'après critère de Weierstass, la convergence normale (donc, uniforme) de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$

sur tout $[-r, r] \subset] - 1, 1[$, ($r > 0$). Car, $\sup_{x \in [-r, r]} \left| \frac{n}{n+1} x^n \right| = \frac{n}{n+1} r^n$, et la série numérique

$\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} r^n$ converge, car $\frac{n}{n+1} r^n \underset{+\infty}{\sim} r^n$, (terme général d'une série géométrique). Alors,

0.5 le Théorème de continuité sur les séries de fonctions, nous permet la continuité de S sur $] - 1, 1[$.

0.5 3) a) Calculons d'abord S . Si $x = 0$, on a $S(0) = 0$.

b) Si $x \neq 0$ Alors, par utilisation l'indication donné, on aura :

0.5
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

0.5
$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt$$

0.5
$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{-1}{1-t} dt = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x).$$

D'où,
$$S(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x) & : x \neq 0 \end{cases}$$

0.5 c) D'une part la fonction S est continue sur $] - 1, 1[$, donc pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient,

0.5
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} S(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}.$$

0.5 D'autre part, on a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} S(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x) \right] = 2 - 2 \ln 2.$

Par conséquent $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = 2 - 2 \ln 2.$