Université de M'sila
Faculté Des Mathématiques et de l'informatique
Département d'informatique

جامعة المسيلة
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
قسم الإعلام الآلي

Examen : Programmation Linéaire (PL) (Corrigé Type)

Durée: 1h 30 - Documents interdits | **Année Universitaire : 2023 / 2024**

Date : 17/01/2022 (10 : 30 – 12 : 00) | **Niveau : L3 SI Semestre : 5**

Exercice 1 : **(5 Points / 15 Minutes)**

Un appareil peut être fabriqué à l'aide de trois processus techniques de production : T1, T2 et T3. Ces processus consomment chacun quatre ressources : Energie, Matières première, Main d'œuvre et Machine. Les consommations par processus, les ressources disponibles et les coûts de revient des pièces sont donnés dans le tableau suivant :

	Energie	Matières première	Main d'œuvre	Machine	Coûts de revient
Processus T1	3	2	3	5	170 000
Processus T2	2	3	6	4	160 000
Processus T3	4	1	4	5	190 000
Capacité	86	64	156	138	

L'appareil sera vendu à 280 000 DA. **(Profit = Prix de vente - Coûts de revien)**.

Q1) Identifier les variables de décision du problème. **(0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5 pts)**

Les variables de décision :

- X_1 : Quantité d'appareils à produire par le processus T1 ;
- X_2 : Quantité d'appareils à produire par le processus T2 ;
- X_3 : Quantité d'appareils à produire par le processus T3 ;

Q2) Écrire le programme linéaire **(PL1)** qui permet de maximiser le profit. **(3.5 pts)**

(Profit = Prix de vente - Coûts de revien)

$$\text{Max } Z = (280000 - 170000)\,x_1 + (280000 - 160000)\,x_2 + (280000 - 190000)\,x_3$$

$$\text{Max } Z = 110000\,x_1 + 120000\,x_2 + 90000\,x_3 \qquad (\textbf{Fonction objectif}) \ (\mathbf{1\ pt})$$

$$(\boldsymbol{PL1}) \quad \boldsymbol{S.C} \begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \le 86 & (\textbf{Energie}) \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \le 64 & (\textbf{Matières première}) \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 + 4\,x_3 \le 156 & (\textbf{Main d'œuvre}) \\ 5\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 \le 138 & (\textbf{Machine}) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 & (\boldsymbol{Contraintes\ de\ non\ négativité}) \end{cases} \qquad (\mathbf{0.5 \times 5 = 2.5\ pts})$$

Exercice 2 : **(5 Points / 25 Minutes)**

On se donne le programme linéaire **(PL2)** suivant:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

La solution proposée pour **(PL2)** est : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$

Q1) Donner la forme standard du programme **(PL2)** et vérifiez que la solution proposée est réalisable.

La forme standard du programme (PL2) : **(0.5 pts)**

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 + e_1 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + e_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + e_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 + e_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases}$$

Vérifier que la solution proposée est réalisable **(0.5 pts)**

En remplacer les valeurs de $x_1, x_2, x_3, x_4, et\ x_5$ dans les contraintes:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$
$$S.C \begin{cases} 0 + 3 \times \frac{4}{3} + 5 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{5}{3} + 2 \times 0 + e_1 = 4 \\ 4 \times 0 + 2 \times \frac{4}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + 0 + e_2 = 3 \\ 2 \times 0 + 4 \times \frac{4}{3} + 4 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{5}{3} + 5 \times 0 + e_3 = 5 \\ 3 \times 0 + \frac{4}{3} + 2 \times \frac{2}{3} - \frac{5}{3} - 2 \times 0 + e_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases} ========> \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = \frac{1}{3} \\ e_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0$ ====> **la solution proposée est réalisable**

Q2) Ecrire le dual **(D)** du programme **(PL2)**. **(1 pt)**

$$\text{Min } W = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4$$
$$S.C \begin{cases} y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 \geq 6 \\ 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -2 \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 - 2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Q3) Appliquer le théorème des écarts complémentaires pour vérifier l'optimalité de la solution proposée.

Vérifier l'optimalité de la solution proposée (1 pt)

D'après **la question (Q1)** on a :

$$\left\{ e_3 = \frac{1}{3} > 0 \quad =====> \quad y_3 = 0 \right. \qquad \dots.(I)$$

D'autre part les variables $x_2, x_3 \; et \; x_4$ sont strictement positives

$$\begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 = 6 \\ x_3 = \frac{2}{3} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 = 5 \\ x_4 = \frac{5}{3} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & -2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 = -2 \end{cases} \qquad \dots.(II)$$

D'après (I) et (II) on obtient le système d'équation suivant : **(1 pt)**

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 = 6 \\ 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 = 5 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 = -2 \\ y_3 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_4 = 6 \\ 5y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 5 \\ -2y_1 + y_2 - y_4 = -2 \\ y_3 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :$(y_1, y_2, y_3,, y_4) = (1, 1,0, 1)$

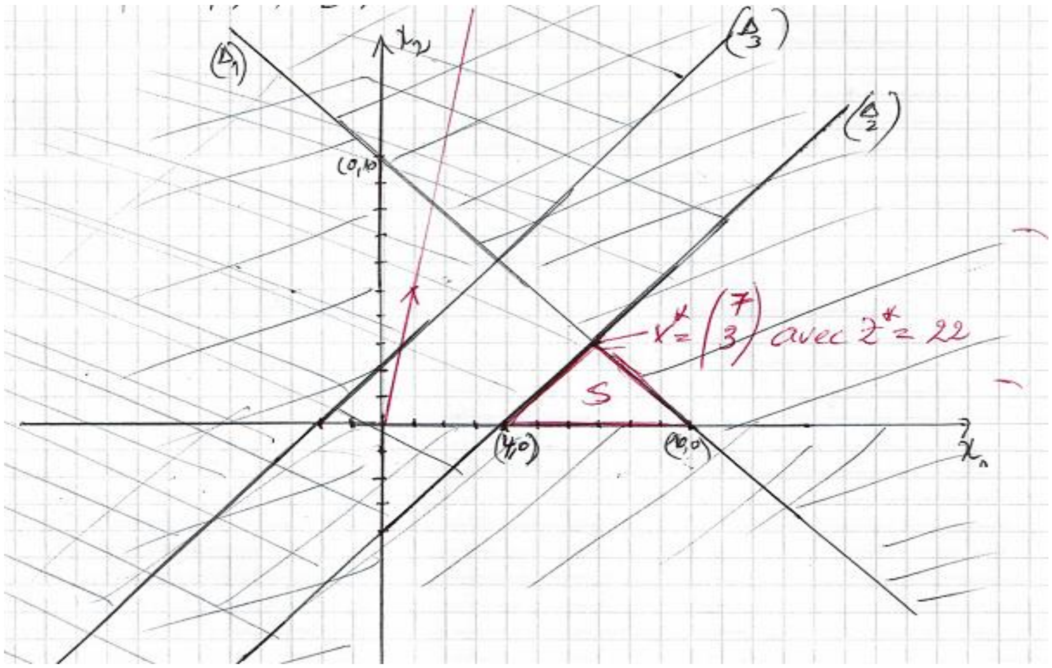
Cette solution ne satisfait pas toutes les contraintes du problème dual. Elle est donc n'est pas une solution duale réalisable et par suite la solution primale proposée n'est pas optimale. (1 pt)

<u>Exercice 3 :</u> (4 Points / 15 Minutes)

On considère le programme linéaire **(PL3)** suivant :

$$Max \;\; Z = x_1 + 5x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q1) Tracer les contraintes et déterminer la région réalisable. **(2.5 pts)**



Q2) La région réalisable comporte combien de points extrêmes ? **(0.5 pts)**

3 points extrêmes

Q3) Déterminer la solution optimale avec la méthode graphique. **(0.5 + 0.5 = 1pt)**

La soluion opimale est unique : $X^* = (x_1, x_2) = (7,3) \Rightarrow Z^* = \; 22$

<u>Exercice 4 :</u> (6 Points / 30 Minutes)

Considérons le problème linéaire **(PL4)** suivant :

$$\text{Min } Z = 12\,x_1 + 20\,x_2$$
$$S.C \begin{cases} 6\,x_1 + \;10\,x_2 \geq 60 \\ 8\,x_1 + \;25\,x_2 \geq 200 \\ 2\,x_1 + \;8\,x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q1) Donner la forme standard du programme linéaire **(PL4)**

La forme standard du programme (PL4) : (1 pt)

$$\text{Min } Z = 12\,x_1 + 20\,x_2$$
$$S.C \begin{cases} 6\,x_1 + \;10\,x_2 - e_1 = 60 \\ 8\,x_1 + \;25\,x_2 - e_2 = 200 \\ 2\,x_1 + \;8\,x_2 + e_3 = 80 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Q2) Résoudre par la méthode des variables artificielles (Big-M) le problème **(PL4)**.

Le M-problème auxiliaire associé au problème (I) s'écrit : **(1 pt)**

$$\text{Min } Z = 12\,x_1 + 20\,x_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S.C\begin{cases} 6\,x_1 + 10\,x_2 - e_1 + A_1 = 60 \\ 8\,x_1 + 25\,x_2 - e_2 + A_2 = 200 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + e_3 = 80 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

D'après la première et la deuxième contraintes :

$$A_1 = 60 - (6\,x_1 + 10\,x_2 - e_1) = 60 - 6\,x_1 - 10\,x_2 + e_1$$

$$A_2 = 200 - (8\,x_1 + 25\,x_2 - e_2) = 200 - 8\,x_1 - 25\,x_2 + e_2$$

D'où $\text{Min } Z = 12\,x_1 + 20\,x_2 + MA_1 + MA_2$

$$\text{Min } Z = 12\,x_1 + 20\,x_2 + M(60 - 6\,x_1 - 10\,x_2 + e_1) + M(200 - 8\,x_1 - 25\,x_2 + e_2)$$

$$\text{Min } Z = (12 - 14\text{M})x_1 + (20 - 35\text{M})x_2 + Me_1 + Me_2 + 260M$$

Donc
$$S.C\begin{cases} 6\,x_1 + 10\,x_2 - e_1 + A_1 = 60 \\ 8\,x_1 + 25\,x_2 - e_2 + A_2 = 200 \\ 2\,x_1 + 8\,x_2 + e_3 = 80 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial (Itération 1): **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	A_1	A_2	b_i	
A_1	**6**	**10**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**60**	**60/10=6**
A_2	**8**	**25**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**200**	**200/25=8**
e_3	**2**	**8**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**80**	**80/8=10**
$c_i - Z$	**12 – 14M**	**20 – 35M**	**M**	**M**	**0**	**0**	**0**	**– 260M**	

Itération 2 : **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	A_1	A_2	b_i	
x_2	**3/5**	**1**	**-1/10**	**0**	**0**		**0**	**6**	**6/(-1/10)= -60**
A_2	**-7**	**0**	**5/2**	**-1**	**0**		**1**	**50**	**50/(5/2)=20**
e_3	**-14/5**	**0**	**4/5**	**0**	**1**		**0**	**32**	**32/(4/5)=40**
$c_i - Z$	**7M**	**0**	**2 -5/2M**	**M**	**0**		**0**	**-120 – 50M**	

Itération 3 : **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	A_1	A_2	b_i	
x_2	**8/25**	**1**	**0**	**-1/25**	**0**			**8**	**6/(-1/10)= -60**
e_1	**-14/5**	**0**	**1**	**-2/5**	**0**			**20**	**50/(5/2)=20**
e_3	**-14/25**	**0**	**0**	**-8/25**	**1**			**16**	**32/(4/5)=40**
$c_i - Z$	**28/5**	**0**	**0**	**4/5**	**0**			**-160**	

Comme les coefficients sur la ligne $c_i - Z$ sont tous positifs, il n'est pas possible de diminuer Z

Donc, le critère d'optimalité est vérifié, la solution $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\mathbf{0}, \mathbf{8})$ est optimale pour le problème (PL4), avec $\boldsymbol{Min\ Z = 160}$. **(1 pt)**

Exercice 5 : **(Bonus)(2 Points / 5 Minutes)**

Soit **A** la matrice 3 × 3 donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Question : Calculer le rang de **A**.

$$Rang(A) = Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Rang (A) est le nombre des lignes non nulles dans la matrice échelonnée de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xRightarrow{\textbf{matrice échelonnée}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 = -2L_1 + L_2 \\ L_3 = -3L_1 + L_3 \end{matrix}$$ **(0.5 pt)**

$$\xRightarrow{\textbf{matrice échelonnée}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = 2L_2 - L_3$$ **(0.5 pts)**

Donc

$$Rang(A) = Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2$$ **(1 pt)**

Bon courage