Université MOHAMED BOUDIAF de M'SILA
Faculté de Technologie
Département de génie électrique

Année universitaire 2023/2024
Domaine ST
(17/01/2024) durée : 1h30min

<u>Corrigé type : Épreuve de OV</u>

<u>Exercice №1</u>*(7pts)*

a) $k_2//k_3 \Longrightarrow k_{eq1} = k_2 + k_3 = 2k + k = 3k$ 0.5

k_{eq1} en série avec k_1 en série avec k_4 $\Longrightarrow \frac{1}{k_{eq2}} = \frac{1}{k_{eq1}} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_4} = \frac{5}{3k} \Longrightarrow k_{eq2} = \frac{3}{5}k$ 0.5

$k_{eq2}//k_5 \Longrightarrow k_{eq} = k_{eq2} + k_5 = \frac{3}{5}k + 2k = \boxed{\frac{13}{5}k}$ 0.5

b) - L'équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

- Donc la solution est sinusoïdale de la forme :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2)$$ 1.00

- Par identification de l'équation différentielle $\ddot{x} + 4x = 0$ avec l'équation (1) on aura :

$$\omega_0^2 = 4 \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = 2rad.s^{-1}}$$ 0.5

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \boxed{3.14s}$$ 0.5

- Les conditions initiales sont $x(0) = 2.0\ cm$ et $\dot{x}(0) = -6.0\ cm.s^{-1}$

On remplace t par 0dans (2) $\Longrightarrow x_0\cos\varphi_0 = 2 \quad (3)$ 0.5

Par dérivation de (2) et en remplaçant t par 0 $\Longrightarrow -2x_0\sin\varphi_0 = -6 \quad (4)$ 0.5

(3) et (4) donne : $\boxed{x_0 = 3.6cm \text{ et } \varphi_0 = 0.983\ rad}$ 0.5 + 0.5

Donc : $\boxed{x(t) = 3.6\cos(2t + 0.983)}$ 0.5

- Déplacement et vitesse à $t = 0.5s$

$x(0.5) = 3.6\cos(2 \times 0.5 + 0.982) = \boxed{-1.44cm}$ 0.5

$\dot{x}(0.5) = -3.6 \times 2\sin(2 \times 0.5 + 0.983) = \boxed{-6.6cm/s}$ 0.5

<u>Exercice №2</u>*(6pts)*

La loi de Kirchhoff donne :

$$v_L + v_R + v_C = 0$$ 0.25

$$\left.\begin{aligned} \text{avec : } v_L &= L\frac{di}{dt} \\ v_R &= Ri \\ \text{et } v_C &= \frac{1}{C}\int idt \end{aligned}\right\}$$ 0.5 0.25

0.5 alors : $\frac{d}{dt}\left(L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt\right) = 0 \Longrightarrow$

0.5 $\ddot{i} + 2\delta\dot{i} + \omega_0^2 i = 0$ avec : $2\delta = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ 0.5

1- <u>A.N :</u> $2\delta = \frac{R}{L} = \frac{80}{0.8} = 100 \Longrightarrow \boxed{\delta = 50s^{-1}}$ 0.5

et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.8 \times 0.5.10^{-6}} = 25.10^5 \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = 1581.14rad/s} \Longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{4ms}$ 0.5

l'équation différentielle aura la forme finale suivante : $\boxed{\ddot{i} + 100\dot{i} + 25.10^5 i = 0}$ 0.5

2- On constate que $\delta < \omega_0 \Longrightarrow$ Le système est faiblement amorti donc le régime est pseudo sinusoïdale. 0.5

La solution est de la forme :

$$\boxed{\imath(t) = I_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)}$$ 0.5

3- $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \boxed{1580 rad.s^{-1}}$ et $D = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\omega_a} = \boxed{0.2}$ 0.5

Exercice №3 *(7pts)* 0.5

Calcul de $U(\theta)$:

$F_\theta = -\frac{dU}{d\theta}$ force généralisée dérivant du potentiel U associée à θ et calculée par :

$$F_\theta = \frac{\delta W(\vec{P})}{\partial\theta} + \frac{\delta W(\vec{F}_{r_1})}{\partial\theta} + \frac{\delta W(\vec{F}_{r_2})}{\partial\theta} = \vec{P}.\frac{\delta\overrightarrow{OC}}{\partial\theta} + \vec{F}_{r_1}.\frac{\delta\overrightarrow{OA}}{\partial\theta} + \vec{F}_{r_2}.\frac{\delta\overrightarrow{OC}}{\partial\theta}$$

$\vec{P} = mg\vec{j}\,,\quad \vec{F}_{r_1} = -k_1\frac{L}{3}\sin\theta\,\vec{\imath}\,,\quad \vec{F}_{r_2} = -k_2 L\sin\theta\,\vec{\imath}$ 1.00

avec : $\overrightarrow{OC} = L(\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{j})$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{L}{3}(\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{j})$

donc et pour les petites oscillations

$$dU = -F_\theta d\theta = \left[mgL + \left(\frac{k_1}{9} + k_2\right)L^2\right]\theta d\theta \Longrightarrow$$ 0.5

$$U(\theta) - U(0) = \int_0^\theta \left[mgL + \left(\frac{k_1}{9} + k_2\right)L^2\right]\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{9}L^2 + k_2L^2 + mgL\right)\theta^2$$

Si on choisit la position d'équilibre comme origine des potentiels alors : $U(0) = 0$.

donc :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{9}L^2 + k_2L^2 + mgL\right)\theta^2$$ 0.5

Calcul de $T(\dot{\theta})$:

$$T = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$ 0.5

Le lagrangien du système est :

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{9}L^2 + k_2L^2 + mgL\right)\theta^2$$ 0.5

La fonction de dissipation D est donnée par :

$D = -\frac{1}{2}\frac{\delta W(\vec{f}_f)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\vec{f}_f.\frac{\delta\overrightarrow{OB}}{\partial t}$ avec : $\vec{f}_f = -\alpha\frac{\delta\overrightarrow{OB}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}L(\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{j})$$

donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{2}{3}L\right)^2\dot{\theta}^2$$ 0.5

2- L'équation de Lagrange du système forcé est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = f_\theta(t)$$ 0.25

$f_\theta(t) = \frac{\delta W(\vec{F}(t))}{\partial\theta} = \vec{f}(t).\frac{\delta\overrightarrow{OC}}{\partial\theta} = L\cos 2t$ en prenant approximativement $\cos\theta \approx 1$ 0.25

Donc et après dérivation terme à terme l'équation différentielle sera :

$$mL^2\ddot{\theta} + \frac{4}{9}\alpha L^2\dot{\theta} + \left(\frac{1}{9}k_1L^2 + k_2L^2 + mgL\right)\theta = L\cos 2t$$

On divise par mL^2 $\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m}\dot{\theta} + \frac{\left(\frac{1}{9}k_1L^2 + k_2L^2 + mgL\right)}{mL^2}\theta = \frac{1}{mL}\cos 2t$$ 0.5

C'est une équation de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{1}{mL}\cos 2t$$

3- Par identification on aura :

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{\left(\frac{1}{9}k_1L^2 + k_2L^2 + mgL\right)}{mL^2} = 50 \Rightarrow \omega_0 = 7{,}071 rad/s \\ \delta &= \frac{2\alpha}{9m} = 1s^{-1}\end{aligned}\right\}$$ 0.5

Donc l'équation différentielle est :

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} + 50\theta = 10\cos 2t \quad (1)$$ 0.5

4- La solution dans la phase permanente est de la forme :

0.25 $$\theta(t) = \theta_0\cos(2\,t + \varphi) \quad \Rightarrow \bar{\theta}(t) = \bar{\theta}_0 e^{j2t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En remplaçant (2) dans l'équation (1) sous sa forme complexe on obtient :

$$(46 + 4j)\bar{\theta}_0 = 10 \;\Rightarrow\; \bar{\theta}_0 = \frac{5}{23 + 2j}$$ 0.5

D'où on trouve : $\theta_0 = \frac{5}{\sqrt{23^2+4}} = \boxed{0.216 rad}$ 0.25

et $\varphi = -\arctan\left(\frac{2}{23}\right) = -0{,}087 rad \Rightarrow \boxed{\theta(t) = 0.216\cos(2\,t - 0{,}087)}$ 0.25

0.25