Université MOHAMED BOUDIAF de M'SILA — *Année universitaire 2023/2024*

Faculté de Technologie — *Département : Electronique*

Durée : 1H30 min

Epreuve de Ondes et Vibrations

Exercice N°1 (12 pts)

On considère un système à un degré de liberté de la fig.1. On se place dans le cas des vibrations de faibles amplitudes. Le système est soumis à des frottements visqueux représentés par un amortisseur de coefficient linéaire $\boldsymbol{\alpha}$, et une force harmonique verticale de la forme : $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

1- Trouver l'énergie potentielle du système, l'énergie cinétique du système et le Lagrangien.
2- Etablir l'équation différentielle des oscillations de petites amplitudes et en déduire la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$, le coefficient d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{F_0}$.

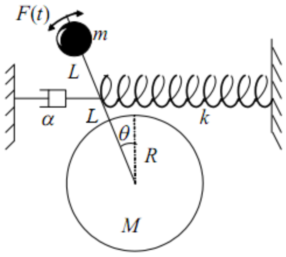

Figure 1 : Système mécanique forcé à un degré de liberté.

Exercice N°2 (8 pts)

On considère les oscillations forcées du système à deux degrés de liberté de la figure 2 :

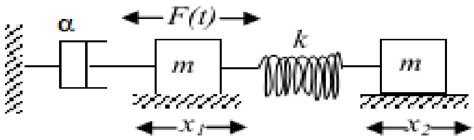

Figure 2 : Système mécanique forcé à deux degrés de liberté.

1) Calculer les énergies cinétique et potentielle du système.

2) En utilisant la formule de Lagrange, établir les équations différentielles du mouvement sachant que $F(t) = F_0 e^{j\Omega t}$. En déduire, lorsque α = 0 et F(t) =0, la pulsation de résonance existante.

Important : Pour consulter le corrigé type et les notes d'examen scanner l'image suivantes

Enseignant de la matière

Dr. Ghellab Torkia

Bon courage

Le corrigé type de l'examen du module Ondes et Vibrations

Exercice N°1 (12 pts)

1. L'énergie potentielle du système, l'énergie cinétique du système et le Lagrangien.

$$U = U_k + U_m$$

$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$$

$$\sin\theta = \frac{x}{L} \Rightarrow x = L\sin\theta \Rightarrow U_k = \frac{k}{2}\left(L\sin\theta\right)^2 + k\left(L\sin\theta\right)x_0 + cte$$

$$U_m = -mgh$$

$$2L = h + x \Rightarrow h = 2L - x$$

$$\cos\theta = \frac{x}{2L} \Rightarrow x = 2L\cos\theta$$

$$h = 2L - 2L\cos\theta = 2L\left(1-\cos\theta\right)$$

$$U_m = -2mgL\left(1-\cos\theta\right)$$

$$U = \frac{k}{2}\left(L\sin\theta\right)^2 + k\left(L\sin\theta\right)x_0 - 2mgL\left(1-\cos\theta\right) + cte$$

à faible amplitude A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\Rightarrow U = \frac{k}{2}L^2\left(\theta^2\right) + kLx_0\left(\theta\right) - 2mgL\left(1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right) + cte$$

$$U = \left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)\left(\theta^2\right) + kLx_0\left(\theta\right) + cte$$

à l'équilibre $U = \left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)\left(\theta^2\right) + cte$.

$$T = T_m + T_D$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x} = 2L\dot{\theta} \Rightarrow T_m = \frac{1}{2}m\left(2L\dot{\theta}\right)^2 = 2mL^2\dot{\theta}^2$$

$$T_D = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2$$

Dr. Ghellab Torkia

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\dot{\theta}^2 - \left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)\left(\theta^2\right) + cte.$$

2. L'équation différentielle des oscillations de petites amplitudes, la pulsation propre ω_0, le coefficient d'amortissement δ et F_θ.

L'équation de Lagrange pour un système amortie forcé est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2F_0 L\cos(\omega t)$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = L\dot{\theta}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)\ddot{\theta} + 2\left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)\theta + \alpha L^2\dot{\theta} = 2F_0 L\cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{2\left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\theta + \dfrac{\alpha L^2}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\dot{\theta} = \dfrac{2F_0 L}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\cos(\omega t) \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = F_\theta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{2\left(kL^2 - 2mgL\right)}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}\theta + \dfrac{2\alpha L^2}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}\dot{\theta} = \dfrac{4F_0 L}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}\cos(\omega t) \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = F_\theta(t) \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2\left(\frac{k}{2}L^2 - mgL\right)}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)} = \frac{2\left(kL^2 - 2mgL\right)}{\left(8mL^2 + MR^2\right)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2\left(kL^2 - 2mgL\right)}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}}$$

$$2\delta = \frac{2\alpha L^2}{\left(8mL^2 + MR^2\right)} = \frac{\alpha L^2}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha L^2}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}$$

$$F_\theta(t) = \frac{2F_0 L}{\left(4mL^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\right)}\cos(\omega t) = \frac{4F_0 L}{\left(8mL^2 + MR^2\right)}\cos(\omega t)$$

Exercice N°2 (8 pts)

1- Les énergies cinétique et potentielle :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$$

2- Les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k\left(x_1 - x_2\right) + \alpha\dot{x}_1 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + k\left(x_2 - x_1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m}\left(x_1 - x_2\right) + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_1 = \dfrac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}\left(x_2 - x_1\right) = 0 \end{cases}$$

En notation complexe on a

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{A}_1 e^{j\Omega t} \\ \bar{x}_2 = \bar{A}_2 e^{j\Omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + j\dfrac{\alpha}{m}\Omega\right)\bar{A}_1 - \dfrac{k}{m}\bar{A}_2 = \dfrac{F_0}{m} \\ -\dfrac{k}{m}\bar{A}_1 + \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m}\right)\bar{A}_2 = 0 \end{cases}$$

On calcule le déterminant :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + j\dfrac{\alpha}{m}\Omega\right) & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & \left(-\Omega^2 + \dfrac{k}{m}\right) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si α=0 et F(t)=0

$$\Delta(\omega)=\left(-\Omega^2+\frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2+\frac{k}{m}\right)-\frac{k^2}{m^2}=0$$

$$\Rightarrow\left(\Omega^4-\frac{2k}{m}\Omega^2\right)=0\Rightarrow\Omega^2\left(\Omega^2-\frac{2k}{m}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Omega_1=0\\ \Omega_2=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\end{cases}$$

Dr. Ghellab Torkia