Université de M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique Le 21/01/2024

Durée : $1h30$

EXAMEN Final: Séries et équations Différentielles(MATH3)

Exercice N°1(8pts)تمرين اجباري :

1) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n}}$

2) En utilisant le critère de Comparaison, trouver la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\ln n}$

3) En utilisant le critère d'intégrale, trouver la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$

4) En utilisant le critère de d'Alembert, trouver la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$

5) Etudier la convergence ou la divergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\cos x|} \quad , \quad \int_0^{1} \frac{1+2x}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1}\boldsymbol{dx}$$

Exercice N°2(6pts): اختار 2 من 3 تمارين

Montrer que la série : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$ Converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Exercice N°3(6pts):

Développer en série entière au voisinage du 0 les fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{2-x}{(1-x)^3}$

Exercice N°4(6pts):

Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie sur $]-\pi,+\pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in]-\pi, 0[\\ x & si \;\; x \in]0, +\pi[\end{cases}$$

En déduire la valeur $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Bonne Chance

S.Bounab

Correction de l'EXAMEN Final: Séries et équations Différentielles(MATH3)

Exercice N°1

1. On remarque que le terme général

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 \neq 0$ *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ *la série* $\sum_{n\geq1} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ *est divergente.* $\ldots.(1pt)$

2. $\forall n \geq 1: \quad \ln n \leq n \Longrightarrow \frac{1}{\ln n+1} \geq \frac{1}{1+n}$

Et on a la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n+1}$ est divergente, car en appliquant la règle de Riemann on aura

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^p \times u_n = k \Longrightarrow on\ prend\ p = 1\ on\ \ trouve\ k = 1 \neq 0$

Donc par comparaison la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{1+\ln n}$ est divergente également $\ldots.(1pt)$

3. $\forall n \geq 2: u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}} \geq 0$;on a aussi $\mathrm{u_n}$ est décroissante $\left(\forall n \geq 2: u'_n = \frac{du_n}{dn} = -\frac{1}{2}\left((\ln n)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq 0\right)$

On peut utiliser le critère d'intégrale où la série a la même nature que l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}} dn = \int_2^{+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}} dn = 2\left[(\ln n)^{\frac{1}{2}}\right]_2^{+\infty} = +\infty \ldots.(1pt)$$

Alors l'intégrale diverge alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$ est divergente également.

4. en appliquant la règle de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{n+1!} \times \frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2}{n+1}\right| = 0 < 1$$

Alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{3^n}{n^2}$ est absolument convergente $\ldots.(1pt)$

5. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\cos x|}$ est impropre de premier espèce, on a par comparaison :

$$\forall x \in [0, +\infty[: \frac{1}{1+|\cos x|} \geq \frac{1}{2}$$

$et\ on\ a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2} = +\infty(\ intégrale\ divregente) \Longrightarrow$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin x|}$ $est\ divergente \ldots.(1pt)$

6. La fonction $\frac{1+2x}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}$ n'est pas bornée en $x_1 = -1 \notin [0,1]\ et x_2 = 1 \in [0,1]$ alors

l'intégrale $\int_0^1 \frac{1+2x}{(1-x^2)^4} dx = \int_0^1 \frac{1+2x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}}} dx$ est impropre de second espèce en$x_2 = 1$,

Et en appliquant le critère de Riemann (pour les intégrales impropres de second espèce) :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} (1-x)^p \times \frac{1+2x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}}} = k$$

$$\left(on\ prend\ p = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow k = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \neq \infty \right)$$

Alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1+2x}{(1-x^2)^4} dx$ est convergente$\ldots.(1.5pt)$

7. $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1} \boldsymbol{dx} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+1} \boldsymbol{dx}}_{=\boldsymbol{0}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} \boldsymbol{dx}}_{=\boldsymbol{2}\int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} \boldsymbol{dx}} \Rightarrow I = 2\int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} \boldsymbol{dx}$

Et en appliquant le critère de Riemann :

$$\forall x \in [1,+\infty[: \lim_{x \to +\infty} x^p \times \frac{x^2}{x^4+1} = k \quad (en\ prenand\ p = 2 > 1 \Rightarrow k = 1 \neq \infty)$$

Alors l'intégrale$2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}$ dx est convergente ; alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^4+1} \boldsymbol{dx}$ ***est convergente.*** $\ldots.(1.5pt)$

Exercice N°2 :

La convergence simple : la série est alternée, elle converge si et seulement si les 2 conditions sont vérifiées :

1) $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+ : \lim_{n \to +\infty} |u_n| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n} \right| = 0 \ldots.(1pt)$

2) $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+ : |\mathrm{u_n}|$ est décroissante $\left(|u'_n| = \frac{d|u_n|}{dn} = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\sqrt{n}+1\right)}{n^2} e^{-\sqrt{n}x} \leq 0 \right)$....(1pt)

$\Rightarrow la\ série \sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$ Converge simplement t sur $\mathbb{R}^+$

La convergence uniforme :

En utilisant le théorème de reste de la série, étant donné que la série est alternée et converge simplement sur$\mathbb{R}^+$, alors on peut écrire $\ldots.(1pt)$

$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+ : |\mathrm{R_n}\,(x)| \leq |\mathrm{u_{n+1}}\,(x)| \ldots.(1pt)$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+ : |\mathrm{R_n}\,(x)| \leq \left| \frac{e^{-\sqrt{n+1}x}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \ldots.(1pt)$$

$puisque \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \ldots.(1pt)$ alors la série converge uniformément sur$\mathbb{R}^+$

Exercice N°3:

$$f(x) = \frac{2-x}{(1-x)^3} = \frac{1+1-x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} \ldots.(1pt)$$

$$On\ a\ \forall x\in\,]-1,1[:\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}(1pt)\ et\ \sum_{n\geq 1}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}(1pt)$$

$$et\sum_{n\geq 2}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}\ldots.(1pt)$$

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}n(n-1)x^{n-2}$$

$$on\ peut\ écrire:\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}=\sum_{n'\geq 0}(n'+1)x^{n'}(0.5pt)\ et\ \sum_{n\geq 2}n(n-1)x^{n-2}$$

$$=\sum_{n'\geq 0}(n'+2)(n'+1)x^{n'}\ldots.(0.5pt)$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)x^n(0.5pt)$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(2+\frac{n}{2}\right)x^n\ldots.(0.5pt)$$

Exercice N°4:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}xdx=\frac{1}{2\pi}|x^2|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\ldots.(1pt)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}(\underbrace{\left|\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^{\pi}}_{=0}-\frac{1}{n}\int_0^{\mu}\sin nx\,dx$$

$$x$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}|\cos nx|_0^{\pi}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\ldots.(1pt)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}(\underbrace{\left|-\frac{x}{n}\cos nx\right|_0^{\pi}}+\underbrace{\frac{1}{n}\int_0^{\mu}\cos nx\,dx}_{=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|-\frac{x}{n}\cos nx\right|_0^{\pi}\Rightarrow b_n=\frac{-(-1)^n}{n}\ldots.(1pt)$$

Par conséquent le Développement en série de Fourier la fonction $f$est donné par :

$$f(x): \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\right)\cos nx + \left(\frac{-(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right) \dots .(0.5pt)$$

- *Pour déduir la somme* $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *on remplace* $x = \pi$ *dans la série de fourier*

Les conditions de Dirichlet sont satisfaite avec $x = \pi$ est un pont de discontinuité avec $\dots .(0.5pt)$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \pi \quad \dots .(0.5pt)$$

$$\frac{\lim_{x\to\pi^-} f(x) + \lim_{x\to\pi^+} f(x)}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\right)\cos n\pi + \left(\frac{-(-1)^n}{n}\right)\sin n\pi\right) \dots .(1pt)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2p+1)^2} \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \dots .(0.5pt)$$