Université de Mohamed Boudiaf M'Sila **Année:** 2019 – 2020
Faculté des Science et Technologies

Analyse Complexe (Math 4)

Exercice 01:

1. Soit $w = u + iv$, exprimer les fonctions u et v en fonction de x et y dans les exemples suivants:

$$A)\ w = z^3 \quad B)\ w = ze^z \quad C)\ w = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad D)\ w = \frac{z-i}{1-iz} \quad E)\ w = \cos(z)$$

2. Ecrire les nombres complexes sous forme algébrique:

$$A)\ w = \frac{3+2i}{1-i}, \quad B)\ w = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - i - 1\right)^7,$$

3. Résoudre les équations:

$$A)\ z^4 - z^2 + 1 = 0 \quad B)\ \sin z = 5 \quad C)\ \exp(e^z) = 1 \quad D)\ \log(z) = i - 1 \quad E)\ z^{1-i} = 4.$$

4. Trouver les valeurs de: $A)\ \log(1-i)\,, \quad B)\ i^i \quad C)\ (-1)^{\sqrt{2}}$.

5. Trouver l'ensemble des points, tel que $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$:

$$A)\ \operatorname{Re}(z^2) \geq 1 \quad B)\ 1 < |z-3| < 2 \quad C)\ \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad D)\ |z-i| = 4 \quad E)\ az + \overline{az} + c = 0.$$

Exercice 02: Trouver un domaine Ω sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes, et donner l'expression de f' en fonction de z si elle existe.

$$a)\ f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad b)\ f(z) = \frac{1}{z} + z\operatorname{Re} z,$$

$$c)\ f(z) = \operatorname{Re} z, \qquad d)\ f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\,arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$e)\ f(z) = -e^x \sin y + ie^x \cos y, \qquad f)\ f(z) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2i\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$g)\ f(z) = \operatorname{Im} z, \qquad h)\ f(z) = \frac{\cos 2\theta}{r^2} - i\frac{\sin 2\theta}{r^2}.$$

Exercice 03:

1. Soit Ω un domaine borné, dont le bord est C, C est un cercle de centre $z_0 = 0$ et de rayon R, calculer:

$$a)\ \int_C x\,dz, \int_C y\,dz, \text{ et } \int_C \overline{z}\,dz.$$

$b)$ Calculer $\int\limits_C z^2 dz$, tel que:

- ♣ C est l'union de segment horisontal de 0 à 1 et de segment vertical de 1 à $1+2i$.
- ♣ C étant le segment de droite qui joint les points 0 et $1+2i$.

2. Soit C le sercle dont l'équation $|z|=1$, calculer: $\int\limits_C \frac{\log z}{z^2} dz, \quad \int\limits_C \frac{1}{z^2} dz, \quad \int\limits_C \frac{dz}{|z|^2}.$

3. C étant le segment de droite qui joint les points $1+i$ et $3+2i$, calculer

$$\int\limits_C \left(x^2-y^2\right) dx - 2xydy.$$

Exercice 04:

1. Donner le développement de Laurant de $a)\ f(z) = \dfrac{z+1}{(z+1)(z+4)}$ dans le demaine $2<|z|<4$

$b) f(z) = \dfrac{1}{(2z+1)(3z+1)}$ dans $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$, $\quad c)^*\ f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ dans $1<|z|<3$,

2. Trouver les singularité de f et indiquer leurs type :

$a)\ f(z) = \dfrac{z}{z+i} \quad b)\ f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)(2z-3)^2} \quad c)\ f(z) = \dfrac{1}{\sin z} \quad d)\ f(z) = \cos\frac{1}{z}$

$e)\ f(z) = \dfrac{\sin z}{z} \quad f)^*\ f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3+1}, \quad g)^*\ f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^3}, \quad h)^*\ f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$

Exercice 05: En utilisant le théorème de Cauchy et de Résidus. Calculer l'intégrale

$a) \int\limits_{|z|=\pi} \dfrac{dz}{(2z+\pi)^2\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}, \quad b) \int\limits_{|z+2i|=\frac{1}{2}} \dfrac{dz}{(z^2+iz+2)^3}, \quad b) \int\limits_{|z+1|=3} \dfrac{e^{zt}dz}{z^3+2iz^2},$

$d)^* \int\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{4z-z^2}, \quad e)^* \int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z-1)z^2}, \quad f)^* \int\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin z}{z^2} dz.$

Exercice 06: Calculer les intégrales suivantes:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-3\cos\theta} d\theta, \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2}, \quad c)^* \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^4} dx.$$