Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Définition 1.1 *Une fonction réelle de n variables réelles est une application d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

– On note

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

– On note par D_f, l'ensemble de défintion de f.

Exemple 1.1

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Exemple 1.2

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Si $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est orthonomé, D_f est un disque fermé.

Exemple 1.3

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \to \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, D_f = B_0(O, 1).$$

Exemple 1.4

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}}, D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \ et \ y < x^2\right\}.$$

Exemple 1.5

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \ln(x + y), D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -x\right\}$$

Définition 1.2

* *L'image par f de D_f est l'ensemble :*

$$Imf(D_f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(X)/X \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}$$

* *L'ensemble des points $S = \{(X, f(X))/X \in \mathbb{R}^n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la surface representative de f (Graphe de f).*

- *Si $n = 1; S$ est une courbe.*
- *Si $n = 2 : S$ est une surface, on dit que S a pour éqution $z = f(x, y)$.*
- *Si $n > 2;$la representation planne devient impraticable.*

1.1 Fonctions partielles et coupes

Définition 1.3 *Soit $f : D_f. \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction et soit $(x_0, y_0) \in D_f$.*

On appelle fonctions partielles de f en (x_0, y_0), les fonctions : $x \to f(x, y_0)$,et $y \to f(x_0, y)$ définies sur $\{x \in \mathbb{R}/(x, y_0) \in D_f.\}$ et $\{y \in \mathbb{R}/(x_0, y) \in D_f.\}$.

Définition 1.4 *Soit $f : D_f. \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction et soit $(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_n}) \in D_f$.*

On appelle fonction partielle de f en $(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_n})$, la fonction :

$$f_i : (x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_i, ..., x_{0_n}) \to f_i (x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_i, ..., x_{0_n})$$

Exemple 1.6

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_x : x \to x^2 + y_0^2 \text{ et } f_y : y \to x_0^2 + y^2$$

Définition 1.5 *Soit $f : D_f. \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, La coupe du graphe de f par le plan d'équation $z = z_0$ est l'intersection entre le graphe de f et le plan $z = z_0$.*

Remarque 1.1 – *Le graphe de la fonction partielle $y \to f(x_0, y)$ s'identifie à la coupe du graphe de f par le plan d'équation $x = x_0$.*

– *Le graphe de la fonction partielle $x \to f(x, y_0)$ s'identifie à la coupe du graphe de f par le plan d'équation $y = y_0$.*

Définition 1.6 *Soit $f : D_f. \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,et $k \in \mathbb{R}$.*

On appelle courbes de niveau (ou lignes de niveau), les courbes d'équations $f(x, y) = k$ c'est à dire $\{(x, y) \in D_f : f(x, y) = k\}$ est la courbe de niveau k.

En autre mot la courbe de nieau k est la projection sur la plan d'équation $z = 0$ de l'intersection du graphe de f avec le plan $z = k$.

Remarque 1.2 *Pour les fonctions de troix variables, on parle de surface de niveau.*

Exemple 1.7 $\quad f(x, y) = x^2 + y^2$

Les fonctions parielles $\quad f_x : x \to x^2 + y_0^2, f_y : y \to x_0^2 + y^2.$

Les courbes de niveau

$$f(x, y) = k \tag{1.1}$$

- *Si* $k < 0$, *n'existe pas de courbes de niveau.*
- *Si* $k \geq 0, (1.1)$ *équivaut à* $y^2 = k - x^2$

  a *En cas* $k = 0$, *les courbes sont* $\{(0,0)\}$.

  b *En cas* $k > 0$,*les courbes sont des cercles de rayon* k *et de centre* $O(0,0)$.

Exemple 1.8

$$f(x,y) = x + y - 1$$

$$f(x,y) = k \iff y = 1 - x + k.$$

Les courbes de niveau sont des droites et le graphe est un plan.

Exemple 1.9

$$f(x,y) = \exp\left(y - x^2\right)$$

$$f(x,y) = k \iff \exp\left(y - x^2\right) = k$$

$$\iff y = x^2 + \ln k, \textit{ avec } k > 0.$$

Les courbes sont des paraboles.

1.2 Limite d'une fonction

* La notion de limite pour une fonction de pluseurs variables généralise naturellement la notion de celle des fonctions d'une seule variable.
* Dés que le domaine se situe dans un espace à 2 dimensions, au moins, les chemins qui mènent à un point donné peuvent suivre divers axes.

Définition 1.7 *Soit* $f : D_f. \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *une fonction définie au voisinage d'un point* A, *sauf peut être en* A, *et soit* $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f *admet une limite* l *lorsque* X *tend vers* A, *si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X - A\| < \delta \implies |f(X) - l| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim\limits_{X \to A} (f(X)) = l$.

Remarque 1.3 $\|.\|$ *designe n'importe quelle norme dans* $\mathbb{R}^n$

Définition 1.8 *On dit que* f *admet* $(+\infty)$ *comme limite lorsque* X *tend vers* A*, si et seulement si,*

$$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta > 0 : \|X - A\| < \delta \implies f(X) > B.$$

Définition 1.9 *On dit que* f *admet* $(-\infty)$ *comme limite lorsque* X *tend vers* A*, si et seulement si,*

$$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta > 0 : \|X - A\| < \delta \implies f(X) < -B.$$

Théorème 1.1 *Si* f *admet une limite, elle est unique.*

Preuve. On suppose que f admet deux limites $l_1 \neq l_2$ en A, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \|X - A\| < \delta_1 \implies |f(X) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \|X - A\| < \delta_2 \implies |f(X) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(X) + f(X) - l_2| \leq |f(X) - l_1| + |f(X) - l_2| < \varepsilon.$$

Remarque 1.4 *L'existence et la valeur éventuelle de la limite est indépendante de la norme choisie dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Remarque 1.5 *Si* f *a pour limite* l *en* A*, la restriction de* f *à toute courbe continue (non seulement les droites) passant par* A *admet la même limite* l*.*

- *En pratique, pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en* A*, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par* A *qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes. Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.*

– *Attension, si la restriction à toute droite passant par A admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe !.*

Remarque 1.6 *Lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul à une limite d'une fonction d'une seule variable et sera :*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} f\left(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta\right)$$

Où $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$, *et (a,b) sont les coordonnées de A*

Exemple 1.10 $f : D_f. \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} / f(x,y) = \dfrac{6x^2y}{x^2+y^2}$

Exemple 1.11 *On va montrer que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

a) *En utilisant la définition*

Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver un $\delta > 0$ telque :

$$\|X - A\| < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2+y^2},$$

donc il sufit que $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{6}$

On prend $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, et la norme ici est $\|\,\|_2$

b) *En utilsant les coordonnées polaires*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} \frac{6r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} 6r\cos^2\theta\sin\theta = 0.$$

$($*car* $\cos^2\theta\sin\theta$ *est bornée*$)$

Exemple 1.12

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Première méthode

– *Le long de l'axe horizontal* $y=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

– *Le long de l'axe horizontal* $x=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2}=-1$$

Deuxième méthode *(En utilisant les coordonnées polaires)*

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta\in\mathbb{R}}}\frac{r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{r^2}=\cos^2\theta-\sin^2\theta,$$

le résultat varaie suivant la direction de θ, *donc la fonction n'admet pas de limite en* $(0,0)$.

Exemple 1.13

$$f(x,y)=\frac{1}{x-y}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=?$

– *Le long de l'axe* $x=1$.

$$\lim_{y\to 1^+}\frac{1}{1-y}=-\infty \ \ et \lim_{y\to 1^-}\frac{1}{1-y}=+\infty$$

Théorème 1.2 *Soient deux fonctions définies de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = l_1$ *et* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = l\ _2$*,alors*

1. $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lim_{X \to A} (\alpha f + \beta g)(X) = (\alpha l_1 + \beta l_2)$$

2. $$\lim_{X \to A} (f \times g)(X) = l_1 \times l_2$$

3. $$Si\ l_2 \neq 0, \lim_{X \to A} \frac{f}{g}(X) = \frac{l_1}{l_2}.$$

Théorème 1.3 *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage d'un point $A \in \mathbb{R}^n$, verifiant les deux conditions :*

1. $$\lim_{X \to A} g(X) = l, \lim_{X \to A} h(X) = l.$$

2. $$\exists \delta_0 > 0, \|X - A\| < \delta_0 \implies g(X) \leq f(X) \leq h(X).$$

Alors

$$\lim_{X \to A} f(X) = l.$$

Preuve. La condition 1 nous donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \|X - A\| < \delta_1 \implies |g(X) - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \|X - A\| < \delta_2 \implies |h(X) - l| < \varepsilon$$

Soit $\delta = \inf(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X - A\| < \delta \implies g(X) \leq f(X) \leq h(X)$$

$$\implies -\varepsilon < g(X) - l \leq f(X) - l \leq h(X) - l < +\varepsilon$$

$$|f(X) - l| < \varepsilon \implies \lim_{X \to A} f(X) = l.$$

Théorème 1.4 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction définie au voisinage de A à valeurs dans $\mathbb{R}$, telleque $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe pour y voisinage de b et $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe pour x voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{b\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = l.$$

Preuve. Posons

$$u(x) = \lim_{y\to b} f(x,y) et v(y) = \lim_{x\to a} f(x,y),$$

u et v sont deux fonctions définies respectivement au voisinage de a et b.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall (x,y) \in D,$$

$$\|(x-a, y-b)\| < \delta \implies |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Donc

$$|x-a| + |y-b| < \delta \implies |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Prenons

$$|x-a| < \delta_1 \text{ et } |y-b| < \delta_2 / \delta_1 + \delta_2 = \delta.$$

donc

$$|u(x) - l| = \left|\lim_{y\to b} f(x,y) - l\right| = \lim_{y\to b} |f(x,y) - l| < \varepsilon.$$

$$|v(x) - l| = \left|\lim_{x\to a} f(x,y) - l\right| = \lim_{x\to a} |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, |x-a| < \delta_1 \implies |u(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0, |x-b| < \delta_2 \implies |v(x) - l| < \varepsilon.$$

Alors :

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b} v(x) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = l.$$

Exemple 1.14 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

– *Pour* $x\neq 0$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x}{x}=1 \implies \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=1.$$

– *Pour* $y\neq 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{-y}{+y}=-1 \implies \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1$$

On a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)\neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Exemple 1.15 $f(x,y)=\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$

On a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0 et \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$

Le long de l'axe $y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

Le long de l'axe $y=-x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^2}=0.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Exemple 1.16 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, y\neq 0 \\ 0, y=0\end{cases}$

On a

$$|f(x,y)|\leq |x|$$

$$\implies 0\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\leq \lim_{x\to 0}|x|=0.$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

–

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$

–

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \textit{n'existe pas car} \lim_{y\to 0} f(x,y) \textit{ n'existe pas.}$$

Conséquence

– L'existence de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \not\Rightarrow$L'existence de $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$.

– L'existence de $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) \not\Rightarrow$L'existence de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

1.3 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.10 *Une fonction au voisinage d'un point A de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$ est dite continue au point A, si $\lim\limits_{X\to A} f(X)=f(A)$*

c'est à dire :

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, |X-A|<\delta_1 \implies |f(X)-f(A)|<\varepsilon$$

ou

$$\forall\varepsilon>0, \exists B_0(A,\delta)>0/\forall X\in B_0(A,\delta) \implies |f(X)-f(A)|<\varepsilon.$$

Exemple 1.17 $f(x,y) = x + 3y, A\,(1,1)$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|f(x,y) - f(1,1)| = |x + 3y - 4| =$$

$$(x-1) + 3\,(y-1) \leq 4 \sup\left((x-1)\,,(y-1)\right) = 4\left\|(x-1)\,,(y-1)\right\|_{\infty}$$

Donc pour que soit

$$|f(x,y) - f(1,1)| < \varepsilon$$

il suffit

$$4\left\|(x-1)\,,(y-1)\right\|_{\infty} < \varepsilon.$$

d'ou

$$\left\|(x-1)\,,(y-1)\right\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{4},$$

il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

Théorème 1.5 *Soit* f *une fonction définie sur* $D \subset \mathbb{R}^n$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $A \in D$*. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1. f *est continue en* A
2. *Pour toute suite* (a_n) *de* D $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(A).$

Théorème 1.6 *Soient* f *et* g *deux fonctions définies et continues en* $A \in \mathbb{R}^n$*,alors*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha f + \beta g)$ *est continue en* A
2. $f + g$ *est continue en* A
3. *Si* $g(X) \neq 0 : \frac{f}{g}$ *est continue en* A*.*

Proposition 1.1 *Si* f *est continue au point* $A\,(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$*, alors les fonctions partielles sont continues aux points* $x_i, i = \overline{1...n}$*. Mais la récciproque n'est pas toujours vraie.*

Théorème 1.7 *$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, alors :*

1. *f est bornée sur D, i.e* $\exists M \in \mathbb{R}_+^* : \forall X \in D \implies |f(X)| \leq M$

2. *f atteint ses bornes inferieur et superieur ie :*

$$\exists (A, B) \in D^2 : f(A) = \inf_{X \in D} f(X) \text{ et } f(B) = \sup_{X \in D} f(X)$$

1.4 Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition 1.11 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : D \to \mathbb{R}^m$*

– *Les fonctions*

$P_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, ..., x_m) \to x_i, i = \overline{1...m}$

sont appelées projections canoniques de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$

– *Les fonctions $f_i : D \to \mathbb{R}$ définies pour tout $i = \overline{1...m}$ par $f_i = P_i o f$ sont appelées les composantes de l'application $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$.*

$$D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{P_i} \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (f_1, f_2, ..., f_m) \to f_i$$

$f_i = P_i o f$

Exemple 1.18

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to f(x, y, z) = (\sin yz, xyz)$$

On a : $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x, y, z) \to \sin yz$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \to xyz$$

Définition 1.12 *Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ définie au voisinage d'un point A sauf peut être en A, et soit $l = (l_1, l_2, ..., l_m) \subset \mathbb{R}^m$*

– *On dit que la fonction $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ admet l pour limite au point A si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X - A\| < \delta \implies |f(X) - l| < \varepsilon.$$

et on écrit $\lim\limits_{X \to A} f(X) = l.$

Remarque 1.7 *Soit $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ définie au voisinage d'un point A de $\mathbb{R}^n$, et soit $l = (l_1, l_2, ..., l_m) \subset \mathbb{R}^m$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{X \to A} f(X) = l.$
2. $\forall i = \overline{1...m}, \lim\limits_{X \to A} f_i(X) = l_i$

Preuve.

– $1 \implies 2$

$$\lim_{X \to A} f(X) = l. \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X - A\| < \delta \implies |f(X) - l| < \varepsilon$$

$$\implies \sup_{i=\overline{1...m}} |f_i(X) - l_i| < \varepsilon$$

$$\implies |f_i(X) - l_i| < \varepsilon \implies \lim_{X \to A} f_i(X) = l_i.$$

– $1 \implies 2$

$\forall i=\overline{1...m}$, $\lim_{X\to A} f_i(X)=l_i$, alors

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \|X-A\|<\delta \implies |f_i(X)-l_i|<\frac{\varepsilon}{m}$$

Par suite :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \|X-A\|<\delta \implies |f(X)-l|<\varepsilon$$

Car

$$\sum_{i=1}^{m}|f_i(X)-l_i|<\underbrace{\frac{\varepsilon}{m}+\frac{\varepsilon}{m}+...+\frac{\varepsilon}{m}}_{m \text{ fois}}$$

– D'où

$$\lim_{X\to A} f(X)=l.$$

Exemple 1.19

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{y^2+1}, \sin\pi\,(x-y)\,, \exp(xy)-1\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) &= \left(\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{x}{y^2+1}, \lim_{(x,y)\to(2,0)}\sin\pi\,(x-y)\,, \lim_{(x,y)\to(2,0)}\exp(xy)-1\right)\\ &=(2,0,\exp(-1))\end{aligned}$$

Définition 1.13 *Une fonction f définie au voisinage d'un point $A\in\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est dite continue au point A si $\lim_{X\to A} f(X)=f(A)$ C-à-d ;*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \|X-A\|<\delta \implies |f(X)-f(A)|<\varepsilon$$

Théorème 1.8 *Soit $f=(f_1,f_2,...,f_m)$ définie au voisinage d'un point A de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f continue en A*
2. *$\forall i=\overline{1...m}$, f_i est continue en A.*

Théorème 1.9 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, A un point de U et $B \subset f(A)$. Considérons $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$, deux fonctions continues respectivement en A et en B. Alors la fonction $h : U \to \mathbb{R}^p$ définie par $h = gof$ est continue en A.*

Preuve.

– g continue en $B \subset f(A)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|Y - B\| < \delta \implies |g(Y) - g(B)| < \varepsilon$$

– Comme f est continue en A, on peut associe à δ un nombre $\delta_1 > 0$ telque

$$\|X - A\| < \delta_1 \implies |Y - B| < \delta \implies |f(X) - f(A)| < \delta$$

Mais

$$\begin{aligned} \|f(X) - f(A)\| < \delta &\implies |g(f(X)) - g(f(A))| < \varepsilon \\ &\implies \|h(X) - h(A)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

donc h est continue en A.

Définition 1.14 *Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}^m$. La fonction f est dite continue sur D si elle est continue en tout point de D.*

Définition 1.15 *Une fonction continue d'une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite uniformement continue sur D si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (X, Y) \in D \times D, \|X - Y\| < \delta \implies |f(X) - f(Y)| < \varepsilon.$$

Exemple 1.20 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X \to \|X\|$

$$|f(X) - f(Y)| = |\|X\| - \|Y\|| \leq \|X - Y\|, \delta = \varepsilon.$$