Chapitre 2 Calcul differentiel sur $\mathbb{R}^n$

2.1 Dérivées partielles

2.1.1 Dérivées partielles premières

Définition 2.1 *Soit f une fonction de deux variables définie sur $D \subset \mathbb{R}^2 f : (x, y) \to f(x, y)$ et soient les fonctions partielles : $f_1(x) = f(x, y_0), f_2(y) = f(x_0, y)$ avec $(x_0, y_0) \in D$*

* *On appelle dérivée partielle de f par rappot à x en (x_0, y_0), la dérivée (si elle existe) de f_1 en x_0. On la note $f'_x(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. On a donc*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_1(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

* *On appelle dérivée partielle de f par rappot à y en (x_0, y_0), la dérivée (si elle existe) de f_2 en y_0. On la note $f'_y(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. On a donc*

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_2(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition 2.2 *Dans le cas général, pour une fonction de n variables, la dérivée partielle de f par rapport à x_i en $X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ est la dérivée de la fonction partielle f_i et donnée par*

$$f'_x(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

* *Si les dérivées partielles existent sur D, elles définissent les fonctions dérivées partielles.*

$$(x, y) \to f'_x(x, y)$$

$$(x, y) \to f'_y(x, y)$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to f'_x(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Définition 2.3 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

On dit que f est de classe C^1 sur D si et seulement si

1. *f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, ..., x_n$ en tout point de D.*

2. *Toutes les dérivées partielles sont continues D.*

Exemple 2.1

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy.$$

$$f_x^{'}(x, y) = 2x + 6y - 2y, f_y^{'}(x, y) = 6y - 2x.$$

$$f_x^{'}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f\,(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0.$$

$$f_y^{'}(1, 2) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1, 2 + k) - f\,(1, 2)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1 + 3(2 + k)^2 - 2(2 + k)}{h} = 10.$$

Exemple 2.2

$$f(x, y, z) = z \arctan y/x.$$

$$f_x^{'}(x, y, z) = z.\frac{1}{1 + (y/x)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-yz}{x^2 + y^2}.$$

$$f_y^{'}(x, y, z) = \frac{xz}{x^2 + y^2}.$$

$$f_z^{'}(x, y, z) = Arc\tan y/x.$$

Définition 2.4 (*Vecteur gradient*)

Le gradient de la fonction f en $(x_1, x_2, ..., x_n)$, on le note par $\nabla f(A)$ ou encore grad$f\,(A)$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières.

$$\nabla f(A) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(A) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(A) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(A) \end{pmatrix}$$

2.1.2 Dérivées partielles d'ordre superieur

– Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A \in D$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ admet une fonction dérivée partielle sur D par rapport à la variable x_i.

Définition 2.5 *Si la fonction dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ *admet une dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ *par rapport à la* $j^{\text{ème}}$ *variable au point* A.
On dit que $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(A)$ *est une dérivée parielle d'ordre* 2 *de* f *au point* A *par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *et* $j^{\text{ème}}$ *variables et on note* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$.

Définition 2.6 *On dit que* f *admet une dérivée partielle d'ordre* k , *en* $A \in D$, *par rapport aux varialbles* $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ *successivement si et seuleument :*
$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right), ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right), ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(...\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)$ *existent.*
Le réel $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}(...\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(A)$ *est noté* $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} .... \partial x_{i_1}}(A)$ *et appelé dérivée partielle d'ordre* k *en* A *par rapport aux variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$.

Exemple 2.3

1.
$$f(x, y) = x + y - 2x^2y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 3x^2y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x^2y.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6xy^2$$

2.
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4y + 3x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^5} = 1 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, y)}{y} = 0$$

Définition 2.7 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

* *On dit que* f *est de classe* C^m *sur* D *si et seuleument toutes les dérivées d'ordre* m *existent et sont continues sur* D.

* *On dit que* f *est de classe* C^∞ *sur* D *et on ecrit* $f \in C^\infty(D)$ *si* $f \in C^m(D)\, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 2.1 (*Théorçme de Schawrtz*)

Soit f *une fonction numérique de* n *variables et de classe* C^m.

La dérivée partielle $\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ *où* $\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_n = n$ *si elle existe ne depend pas de l'ordre dans le quel on effectue les dérivations par rapport à* x_i.

Cas particulier

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1

Si $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$ existent au voisinage de A et sont continues en A, alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(A)$$

Définition 2.8 *On dit que la fonction* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est harmonique sur* D *si et seuleument si*

$$\forall X \in D, \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(X) = 0$$

2.1.3 Dérivation suivant un vecteur

Définition 2.9 *Soit la fonction* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

On dit que f *est dérivable suivant le vecteur* h *(non nul) si* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(A + th) - f(A)}{t}$ *existe*

Cette limite est appelée dérivée suivant le vecteur(ou dérivée suivant la direction) h *et notée par*

$$d_h f(A) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + th) - f(A)}{t}.$$

Exemple 2.5 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{h}(h_1, h_2)$

– *Si* $h_1 = h_2 = 0$ $\qquad \dfrac{f((0,0) + t(h_1, h_2)) - f(0,0)}{t} = 0 \qquad$ *Donc* $\qquad d_h f(0,0) = 0$

– *Si* $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$ $\qquad \dfrac{f((0,0) + t(h_1, h_2)) - f(0,0)}{t} = \dfrac{th_1 h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4}$

Quand $t \to 0, d_h f(0,0) = 0$

f *admet des dérivées suivant toutes les directions au point* $(0,0)$.

2.2 Differentiabilité des fonctions à plusieurs variables

2.2.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

* Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, s'écrit

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i / a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$$

* Si $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $\qquad L(x) = ax$

* Soit $L : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f est dérivable en A si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h} = \text{existe} = f^{'}(A) \tag{2.1}$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A+h) - f(A) - hf^{'}(A)}{h} = 0 \tag{2.2}$$

On peut écrire (2.2) sous la forme

$$f(A+h) - f(A) - hf^{'}(A) = h\varepsilon(h), \tag{2.3}$$

telleque

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) \text{ ou } f(A+h) - f(A) = hf^{'}(A) + O(h)$$

* On remarque que $g(h) = hf'(A)$ est linéaire continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui est appelée differentiel de f en A.

* Donc f est dérivable en A, si et seuleument s'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui verifie

$$f(A+h) - f(A) = g(h) + O(h) \tag{2.4}$$

* Si on passe à $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Les relations (2.1) et (2.2) .n'auront pas de sens (car $h \in \mathbb{R}^n$) ,mais le problème s'impose pas dans (2.3) et (2.4) et ça nous permet de généraliser la définition de differentiabilité en $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.10 *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h = (h_1, h_2; ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$*

* *On dit que f est differentiable en un point $A \in D$, s'il existe n réels $a_1, a_2; ..., a_n$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.tellesque*

$$f(A+h) + f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{2.5}$$

* *L'application $df(A)(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ est apelée differentiel de f en A.*

Conséquance $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Si f est differentiable en un point $A \in D$, alors f admet des dérivées partielles premières en A et

$$df(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, dx_i$$

La réciproque n'est pas toujours vraie

Contre exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Théorème 2.2 *Soit une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, admettent des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 définues dans D et continues en un point A, alors f est differentiable en A.*

Exemple 2.6 $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues $\forall (x,y) \in D$, alors f est differentiable et

$$df(x,y) = \frac{2}{x^2 + y^2}(xdx + ydy), \forall (x,y) \in D$$

2.2.2 Fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition 2.11 *Soit* f *une application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *définiée par*

$f : X \to (f_1'(X), f_2'(X), ..., f_m'(X))$ *où* $f_i' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *pour* $i = \overline{1,m}$

* *On appelle matrice Jacobienne de* f *et on note* J_f *la matrice* $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(A)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(A)}{\partial x_n} \\ & & \\ \frac{\partial f_m(A)}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m(A)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

* *Si* $n = m$ *Le determinant de* J_f *est appelé le jacobien de* f *en* A.

Exemple 2.7 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$

J_f *est* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ *le jacobien est* $2r$.

Définition 2.12 *Soit* $D \subset f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

On dit que f *est differentiable en un point* $A \in D$, *s'il existe une application lineaire continue* $g_A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, *qui verifie*

$$f(A+h) + f(A) = g_A(h) + \|h\| \varepsilon(h) \tag{2.6}$$

telleque $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}^m$ *avec* $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

– *L'application* g_A *est appelée le differentiel de* f *en* A.

$$df(A) = g_A$$

– *On dit que* f *est differentiable sur* D *s-il est differentiable en tout point de* D.

2.2.4 Differentiabilité des fonctions composées

Théorème 2.3 *Soient f une fonction : $D \subset f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et g une fonction définue de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $V \subset \mathbb{R}^p$.*

Si f est differentiable en $A \in D$ et g differentiable en $f(A) \in U$, alors gof est differentiable en A et l'on a

$$d(gof)(A) = dg(f(A))\, odf(A)$$

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses du théorème précédent*

La matrice jacobienne de gof en point A est egale au produit de la matrice jacoboienne de g en point $f(A)$ par la matrice jacobienne de f en A.

$$Jac((gof)(A)) = Jacg(f(A)) \times Jacf(A)$$

Exemple Soit f et g deux fonctions définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow (\exp x \sin y, \exp x \cos y) \qquad\qquad (u, v) \longrightarrow u + 2v$$

$$gof(x, y) = \exp x \sin y + 2 \exp x \cos y$$

$$Jacg(f(x, y)) = (1, 2) \times \begin{pmatrix} \exp x \sin y & \exp x \cos y \\ -\exp(-x) \cos y & -\exp(-x) \sin y \end{pmatrix}$$

$$= (\exp x \sin y - 2 \exp(-x) \sin y, \exp x \cos y - 2 \exp(-x) \cos y)$$

Regle de dérivation en chaine

- Cas : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  Soit f une fonction de deux variables admettent des dérivées partielles premières. x,y des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) \qquad t \longrightarrow x(t) \qquad t \longrightarrow y(t)$$

Alors

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow (x = x(t), y = y(t)) \longrightarrow g(t) = f(x(t), y(t)).$$

$$g^{'}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x^{'}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y^{'}(t)$$

Ex $$g(t) = \ln\left(x^2(t) + y^2(t)\right)$$

$$g^{'}(t) = \frac{2x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \times x^{'}(t) + \frac{2y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \times y^{'}(t)$$

– Cas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$
$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$

$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \longrightarrow x(u, v),$

$y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \longrightarrow y(u, v)$

Donc
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Exemple 2.8

$$g(u, v) = x^2(u, v) + 2y(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2x(u, v) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + 2\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2x(u, v) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + 2\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Formule des accroissements finis

Définition 2.13 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^n$,

On appelle segment de $\mathbb{R}^n$ *d'éxtrimité* a *et* b *l'ensemble des points de* $\mathbb{R}^n$

$$[a,b] = \{X = (1-\lambda)\, a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\}.$$

Théorème 2.7 *Soit* f *une fonction définie et continue sur un ouvert* $U \in \mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in U$. *Si le segment* $[a,b] \in U$ *et si* f *est differentiable en chauque point du segment ouvert* $]a,b[= [a,b] \setminus \{a,b\}$, *il existe alors* $c \in \,]a,b[$ *telleque :*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\,(b_i - a_i)$$

où $a = (a_1, a_2, ...a_n)\,, b = (b_1, b_2, ...b_n)$

Théorème 2.8 *Soient* f *une fonction d'un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f \in C^{p+1}(U)$.

Soient A *et* $A+H$ *deux points de* U $/[A, A+H] \subset U$. *on, note*

$$D^k f(A)(H) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_1}}(A)\, h_{i_1} h_{i_2} ... h_{i_k}$$

Alors $\exists \theta \in \,]0,1[$ *telleque*

$$f(b) - f(a) = f(A) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(A)(H) + ... + \frac{1}{(p+1)!} D^{p+1} f(A + \theta H)(H).$$

Cette formule est appelée formile de Taylor à l'ordre P *avec reste de lagrange.*

$k = 1, D^1 f(A)(H) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ $\qquad$ $k = 2, D^2 f(A)(H) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial i_2}(A)\, h_{i_1} h_{i_2}$

Remarque 2.1 *Sous les mêmes hypothèses du théorèmes précédent on a :*

1. $f(b) - f(a) = f(A) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(A)(H) + \|H\|^{p+1} \varepsilon(H)$

   avec $\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0$ *(Formule de Young)*

2. $f(b) - f(a) = f(A) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(A)(H) + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{p+1} f(A + tH)\, dt$

   (Reste intégrale)

Exemple 2.9 $f(x,y) = \exp x \sin y$

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Alors *F.T d'ordre 2 au voisinage de* $(0,0)$.

$$f(h_1,h_2) = \exp(h_1)\sin h_2 + h_2 + h_1 h_2 + \frac{1}{3!}\exp(\theta h_1) \times (h_1^3 \sin\theta h_2 + 3h_1^2 h_2 \cos(\theta h_2) + ...$$
$$+ 3h_1 h_2^2 \sin(\theta h_2) - h^3 \cos(\theta h_2))$$

2.2.5 Développements limités

Définition 2.14 *Soient* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* A *un point adhérent à* D.
On dit que f *admet un développement limité d'ordre* m *au voiisinage de* A*, s'il existe un polynôme* P_m *de* n *indéterminées de degré inferieur ou égale à* m *et une fonction* ε *telsque :*

$$f(A+H) = P_m(H) + \|H\|^n \varepsilon(H) \qquad \text{où } \lim_{H\to 0} \varepsilon(H) = 0 \text{ avec } H = (h_1, h_2, ..., h_n).$$

Théorème 2.9 *Si* $f \in C^m$ *sur un ouvert contenant* A*, alors* f *admet un développpoment limité d'ordre* m *au voisinage de* A *obtenu à la formule de Taylor.*

Théorème d'inversion locale

Théorème 2.5 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, V$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^m, F : U \to V$ *une bijection et* $A \in U$.

On suppose que F *est differentiable en* A *et* F^{-1}*est differentiable en* $M = f(A)$*. Alors*

$$dF^{-1}(M) = (dF(A))^{-1}$$

Théorème 2.6 (*Théorème d'inversionl ocale*)
Soit D *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, E$ *une partie de* $\mathbb{R}^n, F : D \to E$ *une application de classe* C^1 *et* $A \in D$.

On suppose que le jacobien de F *en* A *et est non nul, alors il existe des ouverts* U *et* V *de* $\mathbb{R}^n$ *telque la restriction* $G : U \to V$ *de* F *à* U *soit bijection et telleque* G^{-1} *soit de classe* C^1*. de plus*

$$dG^{-1}(G(A)) = (dG(A))^{-1}. \qquad \text{pour tout point } A \text{de } U$$