Chapitre 3

Extremums et Fonctions Implicites

3.1 Extremum

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ et $M \in D$.

Définition 3.1

1. *On dit que f admet un minimum (respectivement maximum) local ou relatif en M s'il existe un voisinage V de M telque $f(M) \leq f(x)$ resp $f(M) \geq f(x)$, $\forall x \in V$*
2. *On dit que f admet un minimum (respectivement maximum) global ou absolu en M si $f(M) \leq f(x)$ resp $f(M) \geq f(x)$, $\forall x \in D$*
3. *On dit que le minimum (resp maximum) est strict si les inégalités précédentes sont strictes.*
4. *On dit que f admet un extremum en M si elle présente un min ou un max en M.*

Théorème 3.1 (*Condition nécessaire d'éxistence d'un extremum*)
Si f est diffrentiable sur D et qu'elle présente en M un extremum (local ou global) alors $Df(M) = 0$.

Définition 3.2 *si f est diffirentiable sur D, on appelle un point critique ou stationnaire de f tout point où la differentiable de f s'anulle*

Théorème 3.2 (*Condition suffisante d'éxistence d'un extremum*)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *et* $M \in D$, *si on a les conditions suivantes*

1. $Df(M) = 0$
2. $D^2f(M)(h)^2 > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$

Alors f *admet en* M *un minum local strict*

Exemple

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \to f(x, y) = a - (x - b)^2 - (y - c)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2(x - b) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(y - c)$$

donc $M(b, c)$ *est un point critique*

$$f(x, y) - f(b, c) = -(x - b)^2 - (y - c)^2 \leq 0, \forall (x, y)$$

donc f *présente un maximum en* (b, c).

Exemple

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \to f(x, y) = x^2 y^3. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$$

est un point critique $\qquad f(x, y) > f(0, 0)$ *si* $x \neq 0$*et* $y > 0.$

et $f(x, y) < f(0, 0)$ *si* $x \neq 0$*et* $y < 0.$

donc f *ne présente pas un extremum au point* $(0, 0)$.

Remarque 3.1 *Pour chercher le maximum, on applique le théorème sur* $(-f)$.

Théorème 3.3 *Soit* $D \subset \mathbb{R}^2$,*un ouvert* , $f : D \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^2(D)$ *et* $M \in D$ *un point critique de* f, *on pose*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$$

Alors :

1. *Si* $rt - s^2 > 0$, f *admet un extremum local strict en* M *et on a :*

$$\begin{cases} r > 0, M \ \textit{min} \\ r < 0, M \ \max \end{cases}$$

2. $rt - s^2 < 0, f$ *n'admet pas d'extremum local en* M

3. $rt - s^2 = 0$, *les hypothèses sont insuffisantes pour conclure.*

Preuve. $D^2 f(M)(h)^2 = rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$

$\Delta' = s^2 - rt$, donc il suffit de discuter suivant le signe de Δ' ■

Remarque 3.2 *Dans le cas où* $\Delta' = s^2 - rt = 0$, *il faut écrire le développement de Taylor de* f *à un ordre superieur à* 2 *pour pouvoir conclure.*

Exemple 3.4 $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 + -x - y + 1.$

3.2 Théorème des fonctions implicites

Cas de deux variables

Définition 3.3 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *On appelle fonction implicite de* x *définie par* $f(x,y) = 0$ *toute fonction* φ *définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *telleque pour tout point* x *de* I *on ait* $(x, \varphi(x)) \in D$ *et* $f(x, \varphi(x)) = 0$

Exemple 3.5 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2 - 4, M(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ *et* $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$.

Alors il existe deux fonctions implicites

$\varphi_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}, / \varphi_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

$\varphi_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}, / \varphi_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

Théorème 3.4 *Soient* f *une fonction de classe* C^1 *d'un ouvert* D *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $(x_0, y_0) \in D$ *verifiant* $f(x_0, y_0) = 0$, *on suppose que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors il existe un ouvert $I \times J \subset D$ *contenant* (x_0, y_0) *telque :*

1. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 . \forall (x,y) \in I \times J$
2. *Pour tout* $x \in I$, *il existe un unique* y *dans* J *telque* $f(x,y) = 0$. *La fonction* $\varphi : I :\to J$ *ainsi définie est de classe* C^1 *et verifie :* $\varphi(x_0) = y_0, f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in I$. *et*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \tag{3.1}$$

Remarque 3.3 *La relation* (3.1) *découle de la dérivation par rapport à* x *de l'expression* $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Cas des trois variables

Théorème 3.5 *Soient f une fonction de classe C^1 d'un ouvert D de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0, z_0) \in D$ verifiant $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, Alors il existe un pavé ouvert $I \times J \times K \subset D$ contenant (x_0, y_0, z_0) telque*

1. $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0, \forall (x, y, z) \in I \times J \times K$.
2. $\forall (x, y) \in I \times J$ *,il existe unique $z \in K$ telque $f(x, y, z) = 0$.*

   La fonction $\varphi : I \times J \to K$ ainsi définie est de classe C^1 et verifie

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0, f(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in I \times J$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x, y)) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

Remarque 3.5 * *Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, $S \cap I \times J \times K$ est une surface S_0 qui est le graphe de φ, S_0 admet en $M = (x, y, \varphi(x, y))$ un plan tangent de vecteur normal $\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x, y)), -\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}, 1\right)$.*

* *L'équation du plan tangent en M_0 est $\overrightarrow{M_0 M}.\operatorname{grad} f(M_0)$.*

ou

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0).$$

Exemple 3.6 *Déterminer le plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$,à la sphère d'équation cartezienne*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

On pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

on obtient $\operatorname{grad} f(M_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$

l'équation du plan tangent est donc $\quad (x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0 + (z - z_0)2z_0 = 0$