Chapitre 4 Intégrales doubles et triples

4.1 Intégrales simples :

Définition 4.1 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$.*

On dit que f est intégrable sur $[a, b]$ s'il existe une fonction F telleque :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ et } F^{'}(x) = f(x).$$

F : primitive de f

– Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

– Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$

a $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

b $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

4.2 Intégrales doubles

4.2.1 Généralités

Rappellons que l'intégrale I d'une fonction f sur $[a,b]$ est définie par :

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)\,f(c_i)\qquad \text{avec } x_i\le c_i\le x_{i+1}.$$

Soit $f\ (x,y)$ une fonction supposée continue sur un domaine $D\subset[a,b]\times[c,d]$ (rectangle).

Soient $\delta_1$et δ_2 deux subdivision associés à $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement telsque :

$$\delta_1=\{a=x_0,x_1,...,x_n,x_{n+1}=b\}\quad ,\quad \delta_2=\{c=y_0,y_1,...,y_n,y_{n+1}=d\}$$

donc on peut associé au partage du domaine D en rectangle élémentaires $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$.

On cosidère la somme S :

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}f\ (x_i,y_i)\,.\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\Delta x_i}\times\underbrace{(y_{j+1}-y_j)}_{\Delta y_j}$$

Définition 4.2 *Si f est continue sur D, alors la somme S admet une limite quand n et p tend vers l'infini, et cette limite s'appelle intégrale double de f sur le domaine d'intégration D :*

$$I(f)=\iint_D f(x,y)dxdy\quad=\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}f\ (x_i,y_i)\,.\Delta x_i\times\Delta y_j$$

Remarque 4.1 *La définition s'applique aussi dans le cas où le domaine D n'est pas rectangulaire et limité par une courbe (C)*

Prppriétés

* $\displaystyle\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

* $\displaystyle\iint\limits_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

* $\displaystyle\iint\limits_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy$

* Si $f(x,y)\geq 0$ sur $D \Rightarrow \displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

* $\displaystyle\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$

4.2.2 Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartéziennes

Soit D un domaine d'intégration de $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe (C).

$$I(f) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} f(x_i,y_i)\,.\Delta x_i \times \Delta y_j$$

Soit la somme $S_i = \sum\limits_{j=1}^{p} f(x_i,y_i)\,.\,(y_{j+1}-y_j)$ (Le cas où x_i est fixé)
Par définition l'intégrale simple

$$S_i \to J(x_i) = \int_{y_1(x_i\ )}^{y_2(x_i\ )} f(x_i,y)\,dy$$

y_1, y_2 représentent les ordonnées de $\underset{courbe}{(C)} \cap \underset{droite}{(x = x_i)}$.

Alors

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} J(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b dx \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x\ )} f(x,y)\,dy$$

La notation $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x\ )} f(x,y)\,dy$ est une succession d'intégrales simples et non un produit.

Remarque 4.2 * *Si on échange les roles de x et y on obtient la même valeur de l'intégrale*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

* *Si le domaine $D = [a,b] \times [c,d]$ est rectangulaire*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

* *Si la fonction $f(x,y)$ à variables séparées $f(x,y) = F(x) \times G(y)$, alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)\,dx \int_c^d G(y)\,dy.$$

c-à-d l'intégrale double devient un produit d'intégrales simples.

Exemple 4.1 *Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = xy$ sur D telque $D = [0,1] \times [0,1]$, même chose pour $D = \{(x,y)\,/ 0 \leq x \leq 1, x - y \geq 0\}$.*

4.2.3 Changement de variables

a Jacobien d'une transformation ponctuelle

Soit D et Δ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$,soit φ application bijective de Δ sur D :

$$\varphi : \Delta \rightarrow D$$

$$(u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v))$$

On considère qu' à tout point $x(u, v)$ et $y(u, v)$ admettant des dérivées partielles premières continues sur Δ.

On appelle jacobien de φ le déterminant noté par :

$$J(\varphi) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Exemple 4.2 *Soit* $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \Longrightarrow J(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

b Formule de changement de variables

Soit le changement de variables φ définie par

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

et Δ le domaine image de D par φ^{-1},on suppose et on admet que si $J(\varphi) \neq 0$ lorsque le point $m(u, v)$ déctrit (Δ) alors

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_\Delta [f(x(u, v), y(u, v))] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv$$

Application

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, x(r,\theta), y(r,\theta)$$

Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

donc

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta \left[f(x(r,\theta), y(r,\theta))\right] rdrd\theta$$

Exemple 4.3 *Calculer* $I = \iint_D x \times ydxdy$ *où*

$D = \{(x,y)/x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

Exemple 4.4 *Calculer* $I = \iint_D \exp\left(\frac{y}{x+y}\right) dxdy$ *où* $D = \{(x,y)/x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}$$

$\}$

4.3 Intégrales triples

Définition 4.3 *Soit* $f(x,y,z)$ *une fonction continue sur* $D \subset \mathbb{R}^3$.

On peut envisager le partage du domaine D *parallelipipedes élémentaires :* $[x_i, x_{i+1}] \times [yj, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$

posant $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

On a

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

On admet que si f *est continue sur* D. (S) *admet une limite quaand le nombre de paraleeélipipedes augmente indéfiniment c'est ce qu'on note par* $\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz$, *notation sumilaire à celle de* $\iint$.

Cas particulier

Si $f(x,y,z) = 1$, l'intégrale devient le volume du domaine $D \subset \mathbb{R}^3$.

Propriétés

Les propriétés de $\iiint$ sont similaires à celles de $\iint$

Soient f et g deux fonctions continues sur D et $A \in \mathbb{R}$

* $\iiint_D (f+g) = \iiint_D f + \iiint_D g$.

* $\iiint_D \lambda f = \lambda \iiint_D f$.

* $\iiint_D (f \times g) = \iiint_D f \times \iiint_D g$. (si f et g sont à variables séparées)

* si D_1 et D_2 sont deux domaines disjoints

$$\iiint_{D_1 \cup D_2} f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f$$

* Si $f(x,y,z) \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$

4.3.1 Calcul des intégrales triples

Soit (S) la surface limitant un domaine D

$$I(f) = \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty \\ q\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k) \right]$$

Considèrons la somme

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)(z_{k+1} - z_k).$$

x_i et y_j sont fixées.

Soient P_1, P_2deux points de la surface (C) projétés sur le plan (xoy) , $M_{ij} = (x_i, y_j)$.

Quand $q \to +\infty$

$$S_{ij} \to J(x_i, y_j) = \int_{z_1(x_i,y_j)}^{z_2(x_i,y_j)} f(x_i, y_j, z)\, dz$$

Alors

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} J(x_i, y_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

$$= \iint\limits_d J(x, y) dxdy$$

d : projection de D sur xoy.

On a donc

$$I = \iint\limits_d \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y) dxdydz \right]$$

$$= \iint\limits_d dx.dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Exemple 4.5 *Calculer* $\iiint\limits_d xyzdxdydz$ *sur* $\{(x, y, z) / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.

Remarque 4.3 *Si $f(x,y,z)$ est à variables séparés, alors* $\iiint\limits_D$ *se résume en un produit de l'intégrale* $\int$ *simple*

sinon $\iiint$ *est une succession de* $\iint$ *et* $\int$ *ou succession de* $3 \int$.

Changement de variables dans les intégrales triples

Les coordonnées sphériques Soit $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$

Le point $m(u,v,w)$ décrit le domaine Δ de $\mathbb{R}^3$, le point $M(x,y,z)$ décrit le domaine D de $\mathbb{R}^3$ et si l'application de Δ vers D est bijective, on opère en coordonnées sphériques par le changement de variables suivante :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Remarque 4.4 *Le jacobien de la transformation* $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$

$J = r^2 \sin\varphi$.

4.3.2 Applications

4.3.3 Calcul des aires de surfaces

Soit à calculer l'aire limitée par une courbe Γ tracée sur une surface qui est donnée par l'équation $z = f(x, y)$, où $f(x, y)$ est continue et possède des dérivées parielles continues. Soit L la projection de Γ sur le plan oxy, Designons le domaine du plan Oxy limité par L par D.

La formule permettant de calculer l'air de la surface $z = f(x, y)$ est donnée par

$$\Gamma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Exemple 4.6 *Calculer l'aire σ de la demi sphère superieur.* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

alors $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$\frac{1}{2}\sigma = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$ *pour le calculer on prend* $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$