CHAPITRE 2

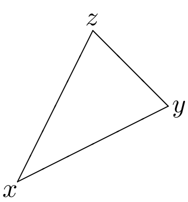
NORMES ET TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}^n$

Dans le chapitre précédent, on a énoncé et démontré les résultats essentiels sur les fonctions continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et les compacts de $\mathbb{R}^n$, sans prononcer le mot « norme ». Pour aller plus loin, il est commode d'introduire ce langage.

3. Distances et normes

***Définition 3.1* (Distances).** — Soit E un ensemble. Une *distance* sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) (*Séparation*) $\quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(2) (*Symétrie*) $\quad d(x, y) = d(y, x)$.
(3) (*Inégalité triangulaire*) $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in E$.



Dans ce cas, on dit que E, muni de la distance d, est un *espace métrique*.

***Définition 3.2* (Normes).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{R}$-ev). Une *norme* sur E
(Q) une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

(1) (*Séparation*) $\quad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
(2) (*Homogénéité*) $\quad N(\lambda u) = |\lambda|\ N(u)$ pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (où $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ).
(3) (*Inégalité triangulaire*) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ pour tout $u, v \in E$.

On dit alors que E, muni de N, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *normé* (en abrégé *evn*).

Remarque 3.3. — Soit (E, N) un evn. Alors l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto N(y - x)$ est une distance. En effet, la séparation est claire, la symétrie découle de l'égalité $N(-u) = N(u)$ et pour $x, y, z \in E$, l'inégalité

$$d(x, z) = N(z - x) \leq d(x, y) + d(y, z) = N(y - x) + N(z - y)$$

découle de 3.2 (3) appliqué à $u = y - x$ et $v = z - y$. C'est d'ailleurs pour cette raison que 3.2 (3) est appelée « inégalité triangulaire ».[(1)]

***Exemple 3.4* (fondamental).** — La valeur absolue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto |y - x|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

Anticipant un peu sur la suite du cours, donnons aussi l'exemple suivant :

Exemple 3.5. — Sur $\mathbb{R}^2$, la « norme euclidienne », définie par $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, est bien une norme. (Exercice : le vérifier !)

***Définition 3.6* (Boules ouvertes ou fermées).** — Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$. On définit la *boule ouverte* de centre x et rayon r par

$$B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$$

et la *boule fermée* de centre x et rayon r par

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}.$$

(Q) En particulier, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, alors

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}, \qquad \overline{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leq r\}.$$

Exemples 3.7. — (1) Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et rayon r est l'intervalle ouvert $]x - r, x + r[$ (resp. l'intervalle fermé $[x - r, x + r]$).

(2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et rayon r est le disque ouvert (resp. fermé) de centre x et de rayon r.

Dans le chapitre 1, on a muni (sans le dire) $\mathbb{R}^n$ de la norme suivante :

(Q) ***Définition 3.8* (Norme N_∞ sur $\mathbb{R}^n$).** — Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

C'est une norme sur $\mathbb{R}^n$: séparation et symétrie sont évidentes, et l'inégalité triangulaire découle de ce que, pour tout i, on a

$$|u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i| \leq \|u\| + \|v\|$$

d'où $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

S'il faut la distinguer d'autres normes qu'on introduira plus tard sur $\mathbb{R}^n$, cette norme sera notée $\|\cdot\|_\infty$. (L'explication de l'indice ∞ sera donnée plus loin.) La distance associée est donnée par :

$$d(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |y_i - x_i|.$$

Remarque 3.9. — Pour cette distance, la boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^2$ de centre $x = (x_1, x_2)$ et de rayon r est le carré (ouvert ou fermé) de côté $2r$ centré en x, i.e.

$$\begin{aligned}\overline{B}(x, r) &= [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - r \leq y_1 \leq x_1 + r, \quad x_2 - r \leq y_2 \leq x_2 + r\}\end{aligned}$$

et de même pour la boule ouverte. De même, pour n arbitraire la boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ de centre $x = (x_1, \dots, x_n)$ et de rayon r est l'hypercube (ouvert ou fermé) de côté $2r$ centré en x, i.e. le produit des intervalles $[x_i - r, x_i + r]$ pour $i = 1, \dots, n$.

---

(1) Certains auteurs appellent 3.2 (3) l'inégalité de Minkowski et réservent le nom d'inégalité triangulaire à 3.1 (3).

Une justification pour introduire la notion d'espace métrique est donnée par la :

Remarque 3.10. — Soit (E, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}^n$). Tout sous-ensemble A de E, muni de la restriction d_A de d à $A \times A$ (i.e. $d_A(x, y) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in A$) est un espace métrique.

Partant de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme N_∞, on a donc une structure d'espace métrique sur tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$: pour tout $a \in A$ et $r > 0$, la boule ouverte de A de centre a et rayon r est :

$$B_A(a, r) = \{y \in A \mid \|y - a\| < r\} = B(a, r) \cap A.$$

Si l'on a deux espaces métriques (E, d) et (E', d') on peut parler d'applications continues $E \to E'$.

***Définition 3.11* (Applications continues)**. — Soient (E, d), (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \to E'$.

(i) On dit que f est continue en un point $x_0 \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, i.e. tel que $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \supset B(x_0, \delta)$.

(ii) Si A est un sous-ensemble de E, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

***Exemple 3.12* (fondamental)**. — Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $A = \mathscr{D}_f$. Dans ce cas, la définition précédente coïncide avec celle donnée en 1.3 : f est continue en un point $x_0 \in A$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(A \cap B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, i.e. tel que pour tout $x \in A$ on ait :

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

On peut définir les applications lipschitziennes dans ce cadre :

***Définition 3.13* (Applications lipschitziennes)**. — Soient (E, d), (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \to E'$.

(i) On dit que f est L-lipschitzienne, où L est un réel > 0, si pour tout $x, y \in E$ on a :

$$(*) \qquad d'(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y).$$

(ii) Il est clair qu'une telle application est continue : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, y) < \varepsilon/L \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(iii) Si L est le plus petit réel > 0 vérifiant $(*)$, on dit que L est la constante de Lipschitz de f.

Le lemme suivant sera utile.

Lemme 3.14. — *Soit (E, N) un $\mathbb{R}$-evn. L'application $N : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, donc continue.*

Démonstration. — Soient $x, y \in E$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $N(y) - N(x) \leq N(y - x)$ et de même $N(x) - N(y) \leq N(x - y) = N(y - x)$, d'où

$$|N(y) - N(x)| \leq N(y - x).$$

Ceci montre que $N : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschizienne. $\square$

Définition 3.15 **(Normes équivalentes).** — Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On dit que deux normes N, N' sur E sont *équivalentes* s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha\, N(x) \leq N'(x) \leq \beta\, N(x), \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Dans ce cas, on a $\beta^{-1}N'(x) \leq N(x) \leq \alpha^{-1}N'(x)$ donc cette relation est *symétrique.*[(2)] On vérifie facilement qu'elle est aussi *transitive* (i.e. si N' est équivalente à N et N'', alors N et N'' sont équivalentes), donc c'est une relation d'équivalence.

(Q) ***Théorème 3.16.*** — *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que toute norme N est équivalente à la norme $\|\cdot\| = N_\infty$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a :

$$N(x) = N(\sum_i x_i e_i) \leq \sum_i N(x_i e_i) = \sum_i |x_i|\, N(e_i) \leq L\, \|x\|$$

où $L = \sum_i N(e_i)$. Ceci montre que l'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est L-lipschitzienne, donc continue.

D'autre part, d'après le lemme 3.14, l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et donc la sphère unité (image réciproque du fermé $\{1\}$) :

$$S_\infty(0,1) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid \|x\| = 1\}$$

est fermée, d'après la proposition 1.19. Comme elle est aussi bornée, elle est compacte (Th. 2.5) et donc, d'après le théorème 2.6, l'application continue N y est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $a, b \in S_\infty(0,1)$ tels que, posant $\alpha = N(a) > 0$ et $\beta = N(b) > 0$, on ait $\alpha \leq N(x) \leq \beta$ pour tout $x \in S_\infty(0,1)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ le vecteur $x' = \dfrac{1}{\|x\|}x$ appartient à $S_\infty(0,1)$ et, comme $N(x') = N(x)/\|x\|$, les inégalités précédentes entraînent

$$\alpha\, \|x\| \leq N(x) \leq \beta\, \|x\|,$$

inégalité qui est encore vérifiée pour $x = 0$. Ceci prouve que N est équivalente à $\|\cdot\|$. □

Exemples 3.17 **(de normes sur $\mathbb{R}^n$).** — 1) L'application N_1, qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $\|x\|_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$: démonstration immédiate, laissée au lecteur.

2) L'application N_2 qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée la norme euclidienne. Ceci nécessite une démonstration, donnée plus bas. Cette norme provient du produit scalaire euclidien donné par $x \cdot y = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i$: on a $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

3) Plus généralement, pour tout réel $p \geq 1$ on peut montrer (voir en TD) que la fonction N_p qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(2) On voit donc qu'un vecteur x est « petit » pour la norme N si et seulement si il l'est pour N'.

Exercice 3.18. — La notation N_∞ est justifiée par le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = N_\infty(x).$$

Démontrer cette égalité. Indication : montrer que $N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq n^{1/p} N_\infty(x)$ et utiliser que $\lim_{p\to+\infty} \log(n)/p = 0$.

Exercice 3.19. — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Remarque 3.20. — On rencontre aussi des normes sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension infinie. Par exemple, soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Comme toute fonction continue f sur $[a,b]$ est bornée et intégrable sur $[a,b]$, on peut munir E des normes suivantes :

(1) $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. La vérification que c'est une norme est facile et laissée au lecteur.

(2) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$. L'inégalité triangulaire résulte de ce que $f \mapsto \int_a^b f$ est croissante et $|f+g| \leq |f|+|g|$. La séparation est un exercice classique.

(3) $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2}$. La séparation est le même exercice. L'inégalité triangulaire découle de ce que $\|\cdot\|_2$ provient du produit scalaire $(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ et de l'inégalité de Cauchy-Scharz (voir plus bas).

Le reste de cette section n'est qu'une réécriture des résultats de la section 1 dans le langage des espaces métriques et peut donc être omis. Noter toutefois que la proposition 3.22 généralise 1.15 (2) au cas où seul l'espace de départ est supposé de dimension finie.

Lemme 3.21. — *Soient E, E' deux $\mathbb{R}$-evn et $f : E \to E'$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue.*
(ii) *f est continue en 0.*
(iii) *Il existe un réel $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.*
(iv) *f est lipschitzienne.*

Démonstration. — Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons f continue en 0. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$f^{-1}(B(0,1)) \supset B(0,2\delta) \supset \overline{B}(0,\delta).$$

Pour tout $x \neq 0$, $x' = \dfrac{\delta}{\|x\|}x$ appartient à $\overline{B}(0,\delta)$ et donc $\|f(x')\| \leq 1$, d'où

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$$

et cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$. Ceci prouve l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Enfin, supposons (iii) vérifié. Alors, pour tout $x, y \in E$ on a

$$\|f(y) - f(x)\| = \|f(y-x)\| \leq C\,\|y-x\|$$

et donc f est C-lipschitzienne. $\square$

Proposition 3.22. — *Soit E un $\mathbb{R}$-evn. Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to E$ est lipschitzienne, donc continue.*

Démonstration. — Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ donc :

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, f(e_i) \leq C \, \|x\|,$$

où $C = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|$. Donc f est C-lipschitzienne, d'après l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du lemme précédent. □

Proposition 3.23. — *Considérons trois espaces métriques (E, d), (E', d'), (E'', d'') et des applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$.*

(i) *Soit $x_0 \in E$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*
(ii) *Par conséquent, si f et g sont continues, $g \circ f$ l'est aussi.*

Démonstration. — (i) Posons $y_0 = f(x_0)$ et $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en y_0, il existe $\delta' > 0$ tel que $g(B(y_0, \delta')) \subset B(z_0, \varepsilon)$, et comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \delta')$. Alors, on a

$$g \circ f(B(x_0, \delta)) \subset g(B(y_0, \delta')) \subset B(z_0, \varepsilon).$$

Ceci prouve (i), et évidemment (ii) en découle. □

Dans un espace métrique (E, d), on peut aussi parler de suites convergentes :

***Définition 3.24* (Limite d'une suite)**. — Soit (E, d) un espace métrique et $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in E$, et on note $x^k \to a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on ait $d(a, x^k) < \varepsilon$.

Proposition 3.25. — *La limite, si elle existe, est unique.*

Démonstration. — Soient $a, b \in E$ deux limites de la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ tels que $d(a, x^k) < \varepsilon$ et $d(b, x^\ell) < \varepsilon$ pour tout $k > n_a$ et $\ell > n_b$. Posons $n_0 = \max(n_a, n_b)$. Alors, pour tout $k > n_0$ on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$d(a, b) \leq d(a, x^k) + d(x^k, b) < 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $a = b$, puisque ε est arbitraire. □

On peut caractériser la continuité en termes de suites :

Proposition 3.26. — *Soient (E, d), (E', d') deux espaces métriques, f une application $E \to E'$ et $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a.*
(ii) *Pour toute suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, la suite $f(x^k)$ de E' converge vers $f(a)$.*

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons f continue en a et soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de E convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Comme $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x^k \in B(a, \delta)$ pour tout $k > n_0$ et donc on a $f(x^k) \in B(f(a), \varepsilon)$ pour tout $k > n_0$. Ceci prouve que la suite $f(x^k)$ converge vers $f(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que f n'est pas continue en a. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x^k \in B(a, 1/k)$ tel que $d'(f(a), f(x^k)) \geq \varepsilon_0$. On obtient ainsi une suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $d(a, x^k) < 1/k$, donc qui converge vers a, mais $d'(f(a), f(x^k)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc $f(x^k)$ ne converge pas vers $f(a)$. □

4. Topologie : ouverts et fermés, parties connexes ou convexes

Dans $\mathbb{R}$, les « bons » sous-ensembles sur lesquels étudier les fonctions dérivables sont les intervalles ouverts. Les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ en sont des généralisations, mais ne suffisent pas : la bonne notion est celle d'ouvert connexe, que l'on va introduire.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme N quelconque, par exemple la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Si N' est une autre norme, il existe d'après le théorème 3.16 des réels $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$ et donc, en notant B et B' les boules ouvertes pour N et N' respectivement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$:

$$(\star) \qquad B'(x, \alpha r) \subset B(x, r) \subset B'(x, \beta r).$$

i.e. toute boule ouverte pour N centrée en x contient une boule ouverte pour N' de même centre, et vice-versa. Ceci montre que les définitions ci-dessous ne dépendent pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

(Q) ***Définitions 4.1* (Ouverts et fermés)**. — 1) On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^n$ est un (sous-ensemble) **ouvert** si pour tout $a \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Noter que, par définition, $\varnothing$ est ouvert, ainsi que $\mathbb{R}^n$.

2) On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un (sous-ensemble) **fermé** si son complémentaire ${}^cF = \mathbb{R}^n - F$ est ouvert.

(Q) ***Proposition 4.2.*** — (1) *Toute boule ouverte est un ouvert.*

(2) *Toute boule fermée est un fermé.*

(3) *Ces notions de fermé et d'ouvert coïncident avec celles introduites en* 1.17*, i.e. F est fermé $\iff$ pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$, on a $\ell \in F$*

(4) *Ces notions de fermé et d'ouvert ne dépendent pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — (1) Soient $B(x, R)$ une boule ouverte et $a \in B$. Alors $r = R - d(x, a)$ est > 0 et, d'après l'inégalité triangulaire on a, pour tout $z \in B(a, r)$:

$$d(x, z) \leq d(x, a) + d(a, z) < d(x, a) + r = R.$$

On a donc $B(a, r) \subset B(x, R)$, ce qui prouve (1).

Prouvons (2). Soient $\overline{B}(x, R)$ une boule fermée et U son complémentaire. Soit $a \in U$, alors $r = d(x, a) - R$ est > 0. Montrons que $B(a, r) \subset U$. Dans le cas contraire, il existerait $y \in B(x, R) \cap B(a, r)$ et par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < R + r = d(x, a),$$

une contradiction. On a donc $B(a, r) \subset U$. Ceci montre que U est ouvert et donc $\overline{B}(x, R)$ est fermé.

Prouvons (3). Supposons ${}^cF$ ouvert au sens de 4.1 et soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^n$. Raisonnant par l'absurde, supposons $\ell \in {}^cF = U$. Alors, d'après l'hypothèse et le point (2), il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset U$. Comme $x^k \to \ell$, il existe k_0 tel que pour tout $k > k_0$ on ait $x^k \in B(a, r) \subset U$, ce qui est une contradiction puisque $x^k \in F$. Ceci montre que $\ell \in F$.

Supposons maintenant F fermé au sens de 1.17 et soit $a \in U = {}^cF$. Raisonnant par l'absurde, supposons que $B(a, r) \cap F \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $x^k \in F \cap B(a, 1/k)$ et $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F convergeant vers a, d'où $a \in F$, une contradiction. Donc il existe $r_0 > 0$ tel que $B(a,r) \cap F = \varnothing$, i.e. $B(a,r_0) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert, donc F fermé au sens de 4.1.

Enfin, (4) découle de $(\star)$, comme remarqué avant la définition 4.1. $\square$

(Q) ***Proposition 4.3.*** — *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\varnothing$ *et* $\mathbb{R}^n$ *sont ouverts (et fermés).*

(2) *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

(3) *Toute intersection* finie *d'ouverts est un ouvert.*

(4) *Toute intersection de fermés est un fermé.*

(5) *Toute réunion* finie *de fermés est un fermé.*

Démonstration. — On a déjà vu (1). Prouvons (2). Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts et $V = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $x \in V$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et comme U_i est ouvert, il existe une boule ouvert B telle que $x \in B \subset U_i \subset V$. Ceci montre que V est ouvert.

Prouvons (3). Soient $U_1, \dots, U_p$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $W = \bigcap_{i=1}^p U_i$. Soit $x \in W$. Pour chaque i on a $x \in U_i$ donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min(r_1, \dots, r_p)$, alors $r > 0$ et pour tout i on a $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$. On a donc $B(x,r) \subset W$ et ceci montre que W est ouvert.

Les propriétés (4) et (5) en découlent par passage au complémentaire, car si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors ${}^c\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} {}^cF_i$ est ouvert d'après (2), donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé.

De même, si $F_1, \dots, F_p$ sont des fermés, alors ${}^c\left(\bigcup_{i=1}^p F_i\right) = \bigcap_{i=1}^p {}^cF_i$ est ouvert d'après (3), donc $\bigcup_{i=1}^p F_i$ est fermé. $\square$

(Q) ***Remarque 4.4.*** — Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple dans $\mathbb{R}$ l'intersection des ouverts $]-1/k, 1/k[$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, est $\{0\}$ qui n'est pas ouvert.

***Définition 4.5* (Topologies).** — Soit E un ensemble. Une **topologie** sur E est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathscr{P}(E)$, dont les éléments sont appelés les *ouverts* de la topologie, vérifiant les propriétés suivantes :

(O1) $\varnothing$ et E sont ouverts, i.e. ils appartiennent à $\mathcal{O}$.

(O2) Toute réunion d'ouverts est un ouvert, i.e. pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, l'élément $\bigcup_{i\in I} U_i$ de $\mathscr{P}(E)$ appartient à $\mathcal{O}$.

(O3) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, i.e. si $U_1, \dots, U_p$ appartiennent à $\mathcal{O}$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_p$ y appartient aussi.

Dans ce cas, les éléments de $\mathscr{F} = \{F \in \mathscr{P}(E) \mid E - F \in \mathcal{O}\}$ s'appellent les *fermés* de la topologie, et en passant au complémentaire on voit qu'ils vérifient les propriétés suivantes.

(F1) $\varnothing$ et E sont fermés, i.e. ils appartiennent à $\mathscr{F}$.

(F2) Toute intersection de fermés est un fermé, i.e. pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{F}$, l'élément $\bigcap_{i\in I} F_i$ de $\mathscr{P}(E)$ appartient à $\mathscr{F}$.

(F3) Toute réunion finie de fermés est un fermé, i.e. si $F_1, \dots, F_p$ appartiennent à $\mathscr{F}$, alors $F_1 \cap \cdots \cap F_p$ y appartient aussi.

Terminologie 4.6. — Il résulte de la proposition 4.3 que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ définissent la même topologie. On dira que c'est *la* topologie de $\mathbb{R}^n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

D'autre part, il résulte de $(\star)$ que les notions de suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ et de fonctions continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ne dépendent pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Pour les fonctions continues, ceci est précisé par la proposition suivante.

Proposition 4.7. — *Soit f une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue sur $\mathbb{R}^n$.*
(ii) *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
(iii) *Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — (ii) et (iii) sont équivalents (par passage au complémentaire) et impliqués par (i), d'après la proposition 1.19. Il suffit donc de montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons donc (ii) vérifié et soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Alors $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert contenant a donc contient une boule $B(a, \delta)$. Ceci montre que f est continue en a. $\square$

***Définitions 4.8* (Intérieur et adhérence)**. — Soit E un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$.

(i) La réunion des boules ouvertes contenues dans E est le plus grand ouvert contenu dans E ; il est noté $\mathring{E}$ et appelé *intérieur* de E. Si $x \in \mathring{E}$ on dit que x est un *point intérieur* à E.

(ii) L'intersection des fermés contenant E est le plus petit fermé contenant E ; il est noté $\overline{E}$ et appelé *adhérence* (ou fermeture) de E. Il est décrit comme suit : le plus grand ouvert Ω disjoint de E est l'intérieur de ${}^cE$; on en déduit que $\overline{E} = {}^c\Omega$.

Par conséquent, un point $a \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\overline{E}$ si et seulement si il n'est pas intérieur à ${}^cE$, i.e. ssi pour tout $r > 0$ la boule ouverte $B(a, r)$ rencontre E. On voit comme d'habitude (i.e. en considérant les rayons $1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$) que ceci équivaut à dire que a est la limite d'une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E. Dans ce cas, on dit que a est *adhérent* à E.

À la fin du cours, on aura besoin de parler de la *frontière* d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; introduisons donc cette notion ici :

Définition 4.9. — Soit A un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. On définit la **frontière** de A par

$$\partial A = \overline{A} - \mathring{A}.$$

Démontrons la proposition suivante, qui est *spécifique aux espaces vectoriels normés* (i.e. elle n'est pas vraie dans un espace métrique quelconque).

Proposition 4.10. — *Soit (E, N) un $\mathbb{R}$-evn et soient $a \in E$ et $r > 0$.*

(i) *L'adhérence de $B(a, r)$ est $\overline{B}(a, r)$.*
(ii) *L'intérieur de $\overline{B}(a, r)$ est $B(a, r)$.*
(iii) *Par conséquent, la frontière de $\overline{B}(a, r)$ (et aussi de $B(a, r)$) est la sphère :*

$$S(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) = r\} = \overline{B}(a, r) - B(a, r).$$

Démonstration. — $\overline{B}(a, r)$ est un fermé contenant $B(a, r)$ et $B(a, r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(a, r)$ donc on a toujours

$$\overline{B(a, r)} \subset \overline{B}(a, r) \qquad \text{et} \qquad B(a, r) \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a, r)}}.$$

Pour prouver les égalités voulues, il suffit de montrer que tout point x de $S(a, r)$ est adhérent à $B(a, r)$ et pas intérieur à $\overline{B}(a, r)$. Or, ceci est clair en considérant la demi-droite

$$a + \mathbb{R}_+(x - a) = \{x_t = a + t(x - a) \mid t \in \mathbb{R}_+\}.$$

En effet, pour $t \in [0, 1[$ on a $x_t \in B(a, r)$, ce qui montre que x est adhérent à $B(a, r)$. D'autre part, x n'est pas intérieur à $\overline{B}(a, r)$ car sinon il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, r\varepsilon) \subset \overline{B}(a, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ contiendrait $x + \varepsilon(x - a) = x_{1+\varepsilon}$, ce qui est absurde car $N(x_{1+\varepsilon} - a) = (1 + \varepsilon)r > r$. $\square$

On va maintenant définir la notion de connexité. (Comme dit au début de cette section, les « bons » sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels étudier les fonctions différentiables sont les ouverts connexes.)

Terminologie 4.11. — Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On le munit de la « topologie induite » en déclarant que les ouverts de A sont les $A \cap U$, pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On vérifie immédiatement que c'est bien une topologie ; de plus les fermés de A sont les $A \cap F$, pour F fermé de $\mathbb{R}^n$.

(Q) ***Définition 4.12* (Connexité).** — Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est **connexe** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(1) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A sont $\varnothing$ et A.

(2) Si $A = A_1 \sqcup A_2$ [3] avec A_1, A_2 ouverts (et donc aussi fermés), alors A égale A_1 ou A_2.

(3) Si U_1, U_2 sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \subset U_1 \cup U_2$, alors A est contenu dans U_1 ou U_2.

(4) Idem avec deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$.

(5) Toute application continue $A \to \{0, 1\}$, où $\{0, 1\}$ est muni de la distance $d(0, 1) = 1$, est **constante**.

L'équivalence des conditions (1) à (4) est à peu près immédiate ; l'équivalence de (1) et (5) est un exercice.

(Q) ***Exemple 4.13* (fondamental).** — Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe : ceci résulte de la caractérisation (5) et du théorème des valeurs intermédiaires. Ou bien directement de la caractérisation (1) en travaillant un peu (exercice !).

Proposition 4.14. — *Soit C un connexe de $\mathbb{R}^n$.*

(i) *$\overline{C}$ est connexe.*

(ii) *Si C' est un connexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $C \cap C' \neq \varnothing$ alors $C \cup C'$ est connexe.*

(iii) *Si $f : C \to \mathbb{R}^p$ est une application continue alors $f(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. — Exercice ! □

Remarque 4.15. — En fait, si C est connexe alors toute partie C' telle que $C \subset C' \subset \overline{C}$ est connexe. Par exemple, si C est le graphe de la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(1/t)$ et X une partie arbitraire du segment $\{0\} \times [-1, 1]$ alors $C \cup X$ est connexe. Les *ouverts* connexes ont de meilleures propriétés.

(Q) ***Définition 4.16.*** — Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $x, y \in E$, le segment

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\} = \{ty + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans E. Comme un tel segment est connexe, il résulte de la caractérisation (5) que toute partie convexe est connexe.

La réciproque est fausse : une partie de $\mathbb{R}^2$ en forme de U est connexe mais pas convexe.

(Q) ***Proposition 4.17.*** — *Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

Démonstration. — Exercice ! □

(Q) ***Théorème 4.18.*** — *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est connexe.*

---

[3] On rappelle que le symbole $\sqcup$ désigne une réunion disjointe.

(ii) *Pour tout $x, y \in U$, il existe une ligne brisée contenue dans U qui les relie, i.e. il existe un nombre fini de points $x_0, \dots, x_p \in U$ tels que $x = x_0$, $y = x_p$ et les segments $[x_{i-1}, x_i]$ sont contenus dans U pour $i = 1, \dots, p$. De plus, on peut imposer que chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$ soit parallèle à un axe de coordonnées.*

Démonstration. — (ii) $\Rightarrow$ (i) est presque immédiat. Fixons a dans U et soit $x \in U$. Il existe une ligne brisée $L = (a = x_0; x_1; \dots; x_p = x)$ joignant a à x. Prenant une paramétrisation de L par $[0, p]$, i.e. posant pour $i = 0, \dots, p-1$ et $t \in [0, 1]$

$$\gamma(i + t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i)$$

on obtient une application continue $\gamma : [0, p] \to U$ tel que $\gamma([0, 1]) = L$. Comme $[0, p]$ est connexe il en est de même de L et donc pour toute fonction continue $f : U \to \{0, 1\}$ on a $f(x) = f(a)$, i.e. f est constante de valeur $f(a)$.

Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii). Il n'y a rien à montrer si $U = \varnothing$. Fixons donc $x_0 \in U$ et notons V l'ensemble des points de U que l'on peut joindre à x_0 par une ligne brisée dans U, dont chaque segment est parallèle à un axe de coordonnées.

Montrons que V est *ouvert*. Soit $a \in V$, comme U est ouvert il existe $r > 0$ tel que U contient la boule $B = B_\infty(a, r)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). Comme a peut être relié à tout $b \in B$ par une ligne brisée L_b dont chaque segment est parallèle à un axe de coordonnées et contenue dans B donc dans U, on obtient en concaténant L_b avec une telle ligne L_a joignant x_0 à a, une ligne du même type joignant x_0 à b. Ceci montre que $B \subset V$, donc V est ouvert.

Montrons que V est *fermé dans* U, i.e. égal à $\overline{V} \cap U$. Soit $b \in \overline{V} \cap U$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_\infty(b, r) \subset U$, puis comme $b \in \overline{V}$ il existe $a \in V \cap B$. Comme précédemment, il existe deux lignes brisées $L_a \subset U$ et $L_b \subset B_\infty(b, r)$, dont chaque segment est parallèle à un axe de coordonnées, joignant respectivement x_0 à a et a à b et l'on en déduit que $b \in V$.

On a ainsi montré que V (non vide car contenant x_0) est à la fois ouvert et fermé dans U et comme U est connexe il en résulte que $V = U$. Ou bien, si l'on préfère, on peut dire que V et ${}^c\overline{V}$ sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$U \subset V \sqcup {}^c\overline{V}$$

(car on vient de montrer que $\overline{V} \cap U \subset V$). Comme U est connexe, il est contenu dans V ou bien ${}^c\overline{V}$, et comme $a \in V$ on a $U \subset V$ d'où $U = V$. □

(Q) ***Remarque 4.19.*** — Dans $\mathbb{R}$, les parties convexes et connexes coïncident et sont précisément les intervalles. D'une part, les intervalles sont par définition les parties convexes de $\mathbb{R}$, i.e. un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi pour tout $a \le b$ dans I, on a $[a, b] \subset I$.

D'autre part, soit $E \subset \mathbb{R}$ un connexe non vide, et soient $a \le b$ dans E. Alors E contient l'intervalle $[a, b]$, car s'il existait $c \in]a, b[$ tel que $c \notin E$ alors E serait réunion des ouverts disjoints $E \cap] - \infty, c[$ et $E \cap]c, +\infty[$, tous deux non vides car le premier contient a et le second b.

5. Rappel : inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne

Dans cette courte section, qui ne sera pas traitée en cours, on rappelle (la démonstration de) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sur laquelle repose le fait que la « norme euclidienne » est bien une norme.

Définition 5.1 **(Produits scalaires et espaces euclidiens)**. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie. Un *produit scalaire* est une forme bilinéaire symétrique sur E[(4)] qui est *définie positive* c.-à-d. qui vérifie :

(Déf. Pos.) $$\boxed{\forall x \in E - \{0\}, \qquad f(x,x) > 0.}$$

(Dans ce cas, on dit aussi que la forme quadratique Q sur E définie par $Q(x) = f(x,x)$ est définie positiive.) Un tel produit scalaire est souvent noté $x \cdot y$ ou $(x \mid y)$. Dans ce cas, on dit que E, muni de $(\ \mid\ )$, est un **espace euclidien.** [(5)]

Exemples 5.2. — (1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ alors

$$(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = {}^tXY,$$

où X désigne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et de même pour Y. Pour ce produit scalaire, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i \mid e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon.

(2) L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,,$$

est un espace euclidien, qui n'est pas de dimension finie.

Théorème 5.3 **(Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)**

(Q) *Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien. On pose $Q(x) = (x \mid x)$ pour tout $x \in E$.*

(1) *On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

(CS) $$\boxed{\forall x, y \in E \qquad (x \mid y)^2 \le Q(x)Q(y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

(2) *Par conséquent, l'application $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, appelée la* **norme euclidienne** *associée à $(\ \mid\ )$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se récrit comme suit (où dans le terme de gauche $|\cdot|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$) :*

(CS) $$\boxed{\forall x, y \in E \qquad |(x \mid y)| \le \|x\|\,\|y\|.}$$

Démonstration. — Si $y = \lambda x$, on a $Q(y) = \lambda^2 Q(x)$ et $(x \mid y)^2 = \lambda^2\,(x \mid x)^2 = Q(y)Q(x)$, et de même si $x = \lambda y$. Donc on a l'égalité si x, y sont liés, en particulier si $x = 0$ ou $y = 0$. Supposons donc x et y non nuls ; alors $Q(x) > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \le Q(tx + y) = t^2 Q(x) + 2t\,(x \mid y) + Q(y)$$

donc le discriminant réduit $\Delta' = (x \mid y)^2 - Q(x)Q(y)$ de ce trinôme [(6)] en t est ≤ 0 (car sinon ce trinôme aurait deux racines distinctes et serait < 0 entre ces racines). Ceci prouve l'inégalité (CS).

[(4)] i.e. une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire en chaque variable et vérifie $f(x,y) = f(y,x)$.

[(5)] En fait, on réserve d'habitude cette terminologie au cas où E est de dimension finie ; sinon on dit que E est un espace *préhilbertien réel*. Nous n'utiliserons pas cette terminologie.

[(6)] Pour un trinôme $aX^2 + 2bX + c$ dont le coefficient de X est *pair*, il est commode de considérer le discriminant réduit $\Delta' = b^2 - ac$ (au lieu du discriminant usuel $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4\Delta'$).

De plus, si $\Delta' = 0$ le trinôme ci-dessus a une racine double réelle $t_0 = -(x \mid y)/Q(x)$, et l'égalité $Q(t_0 x + y) = 0$ entraîne, puisque Q est définie positive, $t_0 x + y = 0$, i.e.

$$y = \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}\, x.$$

Ceci prouve (1).

Prouvons que $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E. Comme $(\ \mid\ )$ est défini positif, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $|t| = \sqrt{t^2}$ et donc

$$\|t\, x\| = \sqrt{t^2\,(x \mid x)} = |t| \cdot \|x\|.$$

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,;$$

alors, multipliant par 2 et ajoutant $\|x\|^2 + \|y\|^2$ aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x \mid y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. □

6. Compacité via Borel-Lebesgue

Cette section est un complément hors-programme et ne sera pas traitée en cours.

***Définition 6.1* (Espaces compacts).** — Un espace métrique (X, d) est dit **compact** s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

(i) Si $(U_i)_{i \in I}$ est un ensemble de boules ouvertes recouvrant X (i.e. dont la réunion égale X), il existe un sous-ensemble **fini** $J \subset I$ tel que les U_i pour $j \in J$ recouvrent X. (Ceci est appelé la propriété de Borel-Lebesgue ; elle se résume en la phrase : « De tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini ».)

(ii) De toute suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément a de X. (Ceci est appelé la propriété de Bolzano-Weierstrass.)

La démonstration de l'équivalence de (i) et (ii) en général est un peu longue ; elle pourra être vue en TD ou dans un appendice à ce polycopié. Contentons-nous de démontrer que tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ possède ces deux propriétés.

Théorème 6.2. — *Soient $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$. L'intervalle $[a, b]$ est compact.*

Démonstration. — La propriété de Bolzano-Weierstrass a été vue en L1 ; démontrons donc (i). Soit $(U_i)_{i \in I}$ un ensemble d'intervalles ouverts recouvrant $[a, b]$. L'ensemble X des $x \in [a, b]$ tels que $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i est non vide car il contient a ; notons c sa borne supérieure et montrons que $c = b$ et $b \in X$.

D'abord, c est contenu dans un intervalle ouvert $U_{i_0} =]c - \alpha, c + \beta[$, avec $\alpha, \beta > 0$. Comme c est la borne supérieure de X, il existe $x \in]c - \alpha, c]$ tel que $[a, x]$ soit contenu dans une réunion finie $\bigcup_{i \in J} U_i$. Posons $J' = J \cup \{i_0\}$. Alors on a

$$[a, c + \beta[\;\subset [a, x] \cup U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$$

et donc $[a,c] \subset [a,c'] \subset \bigcup_{i\in J'} U_i$ pour tout $c' \in [c, c+\beta[$. Comme c est la borne supérieure de X, ceci entraîne que $c = b$, puis que $b \in X$. $\square$

Ceci se généralise comme suit au cas de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 6.3. — *Dans $\mathbb{R}^n$, soit K un « pavé fermé borné », i.e. un produit $I_1 \times \cdots \times I_n$ où chaque I_k est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors K est compact.*

Démonstration. — Démontrons d'abord la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. D'après le théorème 6.2, on peut extraire une sous-suite $x^{\varphi_1(k)}$ dont la première coordonnée converge vers un réel $a_1 \in I_1$, i.e. telle que la suite $x_1^{\varphi_1(k)}$ converge vers a_1.

Puis on peut extraire de cette suite une sous-suite $x^{\varphi_2(k)}$ (i.e. $\varphi_2(k) = \varphi_1(\psi(k))$ pour une certaine fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) dont la seconde coordonnée converge vers un réel $a_2 \in I_2$. Après n extractions, on obtient une suite $y^k = x^{\varphi_n(k)}$ dont la j-ème coordonnée converge vers un réel $a_j \in I_j$, pour $j = 1, \ldots, n$. Alors y^k converge vers $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Considérons maintenant un recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de K par des boules ouvertes, i.e. chaque U_λ est un produit d'intervalles ouverts.

Pour alléger l'écriture, plaçons-nous dans le cas $n = 2$. Alors, $K = [a,b] \times [c,d]$. Le segment $[a,b] \times \{c\}$ est compact, donc est recouvert par un nombre fini de carrés U_λ. Donc il existe $y \in]c,d]$ tel que le rectangle $[a,b] \times [c,y]$ soit contenu dans un nombre fini de U_λ (faire un dessin !). Notons Y l'ensemble des tels y et z sa borne supérieure. Montrons que $z = d$ et $d \in Y$.

D'abord, le segment $[a,b] \times \{z\}$ est compact, donc est recouvert par un nombre fini de carrés $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_p}$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que le rectangle $[a,b] \times]z-\varepsilon, z+\varepsilon[$ est contenu dans $\Omega = \bigcup_{i=1}^p U_{\lambda_i}$.

D'autre part, comme z est la borne supérieure de Y, il existe $y \in]z-\varepsilon, z]$ tel que $[a,b] \times [c,y]$ soit contenu dans une réunion finie Ω' de U_λ. Alors on a (faire un dessin !)

$$[a,b] \times [c, z+\varepsilon[\subset \big([a,b] \times [c,y]\big) \cup \Omega \subset \Omega' \cup \Omega$$

d'où

$$[a,b] \times [c,z] \subset [a,b] \times [c,z'] \subset \Omega' \cup \Omega$$

pour tout $z' \in [z, z+\varepsilon[$. Comme z est la borne supérieure de Y, ceci entraîne que $z = d$, puis que $d \in Y$. $\square$

Définition 6.4. — Soit (E,d) un espace métrique. Une partie A de E est dite *bornée* s'il existe un réel $C > 0$ tel que $d(a,b) \le C$ pour tout $a, b \in A$. Si on fixe $a \in A$, ceci entraîne que $A \subset B(a,C)$.

Réciproquement, s'il existe $x_0 \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A \subset B(x_0,R)$ alors, pour tout $a, b \in A$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$d(a,b) \le d(a,x_0) + d(x_0,b) \le 2R$$

Lemme 6.5. — *Soit (E,d) un espace métrique compact. Alors E est borné.*

Démonstration. — Par hypothèse, E est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes $B(x_i,1)$, pour $i = 1, \ldots, N$. Notons $C = \max_{i,j} d(x_i,x_j)$. Soient $x, y \in E$; il existe i, j tels que $x \in B(x_i,1)$ et $y \in B(x_j,1)$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire on a :

$$d(x,y) \le d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) \le C + 2.$$

$\square$