Université de M'sila | Faculté de Maths-Info

Topologie de $\mathbb{R}^n$

L2 Maths | Module: Analyse 4

Série d'exercices n°1

Licence mathématiques-L2 2024

Remarque 1

l'exercice noté par ($\star$) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1

Soit a, b deux réels strictement positifs. Pour tout $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\|u(x, y)\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité ouverte pour cette norme.
3. Montrer que $\|.\|$ et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes telle que $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 2

Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

1. Montrer que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_2\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$\overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x, y)\| \leq 1\},$$

par chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 3

Soit l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tous vecteurs $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

2. Déduire que si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs $x_k \in \mathbb{R}^n$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ alors,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = \|\lim_{k\to+\infty} x_k\|.$$

3. Soient (x_k) et (y_k) deux suites vectorielles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = l \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - y_k\| = 0$, on voit $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = l$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose: $x_n = \left(\dfrac{1}{1+n}, 1+e^{-n}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 5

Soit $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie et continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$, et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ sont des normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $(\star)$.
2. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_n(x) = \begin{cases} 1-(n+1)x & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n+1} \\ 0 & si\ \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$

   Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.
3. Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice supplémentaire 1

Soit N une application de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Montre N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. En utilisant l'inéqualité de Cauchy-Schwarz montrer que $N \leq N_2$.
3. Soit (Δ) la droite d'equation: $tx+y=0$ et $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Donner la valeur de $d(M_0,\Delta)$, puis, en déduire l'équivalence de N et N_2, c'est à dire $N \approx N_2$.

Exercice supplémentaire 2

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application

$$\|N_\lambda(x,y)\| = \sqrt{x^2+2\lambda xy+y^2}$$

définie une norme sur $\mathbb{R}^2$.