TD n° 1

Exercice 1 :

Soit l'équation suivante : $x^3 - x - 1 = 0$

1. Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle [1,2].
2. Est-ce-que cette solution est unique ?
3. Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode de la bissection avec une précision de 10^{-2}.

Exercice 2 :

Utiliser la méthode de la bissection pour calculer une approximation de la solution de l'équation : $1 - xe^x = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 3 :

Soit l'équation suivante : $x - 0.8 - 0.2\sin x = 0$

En utilisant la méthode de Newton-Raphson résoudre l'équation dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ avec la précision $\varepsilon = 10^{-5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 :

On veut évaluer $\sqrt{a}$ en appliquant la méthode de Newton-Raphson.

1. Ecrire l'équation récurrente
2. On considère maintenant que $a = 7$ et l'intervalle $[1,4]$.
   a. Vérifier que la méthode de Newton-Raphson est convergente vers une solution unique.
   b. Donner les quatre premières itérations pour les deux cas : $x_0 = 1$ et $x_0 = 3$.

Exercice 5 :

Soit l'équation suivante : $\cos x - x = 0$

1. Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle [0,1].
2. Trouver la fonction $g(x)$ qui assure la convergence de la méthode du point fixe.
3. Calculer la solution approximative avec la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 0.5$.

Exercice 6 :

On veut résoudre l'équation : $x^3 - x - 1 = 0$ par la méthode du point fixe dans l'intervalle [1,2].

1. Montrer que la fonction $x = g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ vérifie les conditions de convergence.
2. Calculer la solution approximative avec la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 1.5$.
3. Comparer le nombre d'itérations obtenu avec celui de l'exercice 1. Que peut-on conclure ?

TD n 2

Exercice 1 :

Résoudre le système d'équations suivant en utilisant la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

1. Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

2. Factoriser ma matrice A en produit **LU** ou **L** est une matrice triangulaire inférieure (avec tout éléments de diagonal 1) et (**U** triangulaire supérieure), puis résoudre ce système.

Exercice 3 :

Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ x4_1 - x_2 + 2x_3 = 14 \\ -6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$

Résoudre ce système par factorisation de la matrice A en LU

Exercice 4 :

Soit les deux matrices suivantes :

A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A et B par la méthode de Gauss.

2 .Déduire le déterminant de A^{-1} ,B^{-1} et $(A,B)^{-1}$.

TD n° 3

Exercice 1 :

1. Réécrire le système linéaire de façon qu'il soit à diagonale dominante :

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode de Jacobi puis celle de Gauss-Seidel, calculer les 3 premières itérations en prenant $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

Exercice 2 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

1. En partant de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, déterminer les 5 premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
2. Sachant que la solution exacte est $\vec{X} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$, que peut-on conclure?

Exercice 3 : (supplémentaire)

En utilisant la méthode de Jacobi puis celle de Gauss-Seidel, calculer les 3 premières itérations en prenant $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Pourquoi cette divergence et qu'elle méthode diverge le plus rapidement.

TD n° 4

Exercice 1 :

Soit les trois points $(0, 1)$, $(1, 0.5)$ et $(3, 0.25)$ de la fonction $f(x)$.

1. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par ces points.
2. Obtenir une approximation de $f(1.5)$.
3. Connaissant que $f(x) = 1/(x+1)$, calculer l'erreur maximale commise en approximant $f(x)$ par $P(x)$ puis la comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 2 :

Soit les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définis comme suit :

x	0	1	2
$P(x)$	-6	3	21
$Q(x)$	10	15	40

Trouver leurs points d'intersection en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Exercice 3 :

Obtenir une approximation de $f(4.5)$ en utilisant le polynôme de Newton de degré 2 ainsi que les données suivantes :

Fonction tabulée				
x	1.0	3.0	5.0	7.0
$f(x)$	0.0000	1.2528	1.6094	1.9459

Exercice 4 :

1. En utilisant la méthode d'interpolation de Newton, calculer une approximation de $\sqrt{1.6}$. Prendre $x_0 = 1, x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. Calculer l'erreur commise.

Exercice 5 (supplémentaire) :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = |x|$ passant par les points d'abscisses -1, -0.5, 0, 0.5 et 1.