



Limites et Continuité

Série d'exercices n°2

Licence mathématiques-L2 2024

Remarque 1 ★★☆☆

L'exercice noté par (★) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Exercice 1 ★★☆☆

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données si possible.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f_1(x, y) = \ln(x + y - 1).$(★)</p> <p>2. $f_2(x, y) = \sqrt{1 - xy}.$</p> <p>3. $f_3(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$</p> | <p>4. $f_4(x, y, z) = \frac{1 + x^2}{xyz}.$</p> <p>5. $f_5(x, y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x - y}}.$</p> <p>6. $f_6(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}.$(★)</p> |
|---|--|

Exercice 2 ★★☆☆

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données.

- | | |
|--|--|
| <p>1. $f(x, y) = x + y - 1$</p> <p>2. $f(x, y) = e^{y-x^2}.$</p> | <p>3. $f(x, y) = y - \cos x.$(★)</p> <p>4. $f(x, y) = \ln(x - y^2).$</p> |
|--|--|

Exercice 3 ★★☆☆

Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants:

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$</p> <p>2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x - y}.$</p> <p>3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x - 1)^2 + y^2}.$</p> | <p>4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$ (★).</p> <p>5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{y}\right).$</p> <p>6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$</p> | <p>7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}.$</p> <p>8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y - 3}{x + y + 1},$ (★).</p> <p>9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{e^x - 1}.$</p> |
|---|--|--|

Exercice 4 ★★☆☆

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 sauf les points de la première bissectrice ($y = x$), telle que: $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. Montrer que, $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\alpha)} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos \alpha$.

2. Calculer les limites suivantes

- | | |
|---|--|
| <p>(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$</p> | <p>(b) $\lim_{\ (x,y)\ _2 \rightarrow +\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(2xy).$</p> |
|---|--|

Exercice 5 ★★☆☆

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeur dans \mathbb{R} définie par: $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$.
 Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ de trois manières différentes:

- | | |
|---|-------------------------|
| 1. Par majoration.
2. En utilisant les coordonnées polaires. | 3. Selon la définition. |
|---|-------------------------|

Exercice 6 ★★☆☆

Soit les deux fonctions f, g suivantes définies sur \mathbb{R}^2 par :

$1. f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$	$2. g(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
---	--

Sont-elles continues sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 7 ★★☆☆

Étudier si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point a

$1. f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, a(0,0).$	$3. f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}, a(0,0) \quad (\star).$
$2. f(x,y) = \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2}, a(2,0).$	

Exercice 8 ★★☆☆

Montrer que les ensembles suivants sont compacts

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, \}$.
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\}, (\star).$

Exercice supplémentaire 1 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & \text{si } x^2 + y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .