Université de M'sila		Faculté des Mathématiques et d'Informatique
L 2 Mathématiques	**Correction de Série: N 02** ✍ **Limites et Continuité** ✍	Module: Analyse 4

Remarque 1

1 Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l(finie)$, en $a(x_0,y_0)$, alors la restriction de f à tout courbe continue passant par a a la même limite.

2 Pour montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ n'existe pas en $a(x_0,y_0)$, il suffit de chercher deux restrictions aux des courbes continues passant par a qui conduisent à des limites différentes.

3 Voici quelques courbes continues passant par $a(x_0,y_0)$.

(a) Les droites:

$$\begin{aligned} x &= x_0, \quad \text{la droite verticale} \\ y &= m(x-x_0)+y_0, \quad m\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Les paraboles

$$\begin{aligned} y &= m(x-x_0)^2+y_0, \quad m\in\mathbb{R}, \\ x &= m(y-y_0)+x_0, \quad m\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Correction d' exercice 1 ☆

On détermine le domaine de définition des fonctions suivantes:

1 Si $f_1(x,y) = \ln(x+y-1)$. Alors, on a: $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y > 1-x\right\}$.
Voir, au dessous le présentation de $\mathcal{D}_i$, où $i\in\{1,...,5\}$.

2 Pour $f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$. On a, donc,

$$\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ xy\le 1\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\le \frac{1}{x},\ x\ne 0\right\}.$$

3 Dans le cas, $f_3(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 4,\ \text{et } x^2+y^2>1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1< x^2+y^2\le 4\right\}. \end{aligned}$$

4 $f_4(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_4 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y>0,\ \text{et } x-y>0\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<y<x\right\}. \end{aligned}$$

5 $f_5(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq x^2, \text{ et } y > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq x^2\right\}.\end{aligned}$$

6 $f_6(x,y,z) = \dfrac{1+x^2}{xyz}$.

$$\mathcal{D}_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \ y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\right\} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}.$$

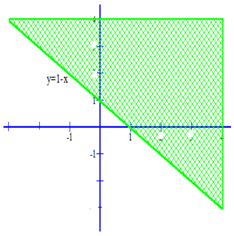


Figure 1: $\mathcal{D}_1$.

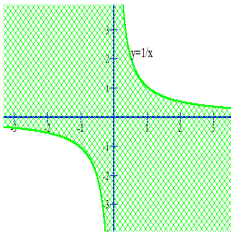


Figure 2: $\mathcal{D}_2$.

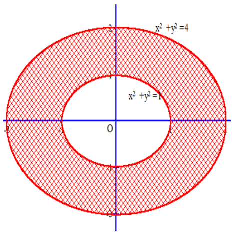


Figure 3: $\mathcal{D}_3$.

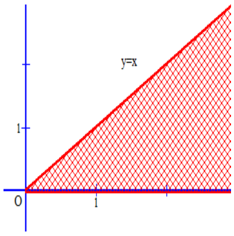


Figure 4: $\mathcal{D}_4$.

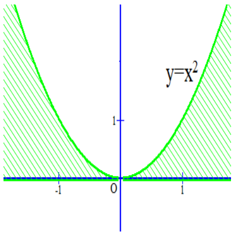
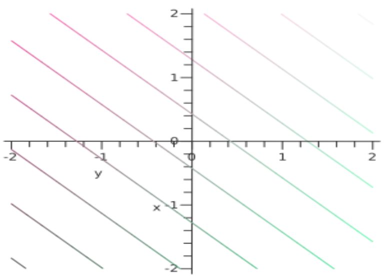


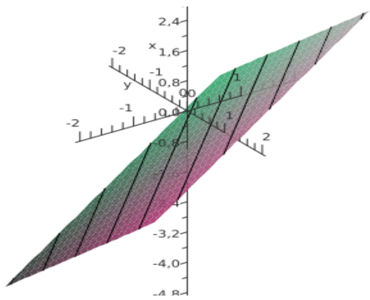
Figure 5: $\mathcal{D}_5$.

Correction d' exercice 2 ☆

Les courbes de niveau des fonctions de deux variables. Soit k un réel. Alors, on voit que:

1 Pour $f(x,y) = x + y - 1$, on a: $f(x,y) = x + y - 1 = k \Rightarrow y = 1 - x - k$. Alors, les courbes de niveau sont donc des droites et le graphe de f est un plan.

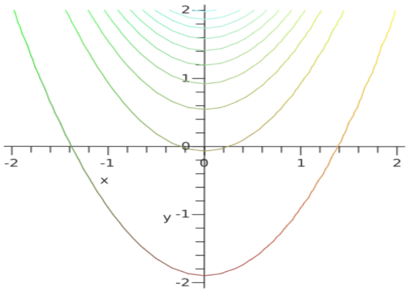


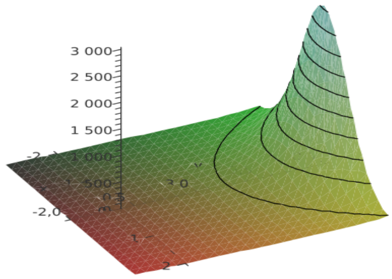


2 Si $f(x,y) = e^{y-x^2}$, alors, on a $f(x,y) = e^{y-x^2} = k$. On distingue 2 cas possibles

(a) Si $k \leq 0$, le courbe au niveau k est l'ensemble vide $\emptyset$.

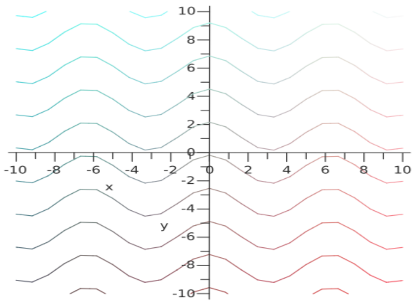
(b) Si $k \leq 0$, alors, on trouve $f(x,y) = e^{y-x^2} = k \Rightarrow y = x^2 + \ln(k)$. les courbes de niveau sont donc des paraboles.

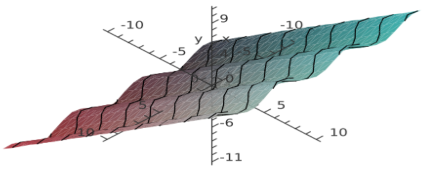




3 Pour $f(x,y) = y - \cos x$, on aura $f(x,y) = y - \cos x = k \Rightarrow y = \cos x + k$.

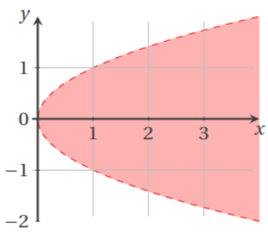
4 $f(x,y) = \ln(x - y^2)$.

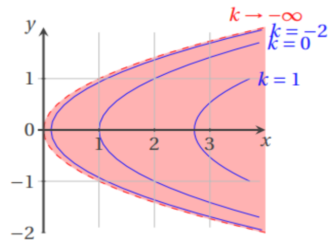




(a) Alors, le domaine de définition de f est : $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < x^2\right\}$.

(b) $f(x,y) = \ln(x - y^2) = k \Leftrightarrow x - y^2 = k \Leftrightarrow x = y^2 + k$.





Correction d' exercice 3 ☆

On calcule les limites (si elles existent) dans les cas suivants:

1 On utilisant une majoration, et comme, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy \leq 2xy \leq x^2 + y^2$. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

2 On utilisant la restriction de f sur la courbe continue $x = 1$ qu'elle passe par $A(1,1)^2$. $\lim_{y\to 1^+} \frac{1}{1-y} = -\infty$, et $\lim_{y\to 1^-} \frac{1}{1-y} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas.

3 En passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \qquad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on obtient,

$$f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\sin^3\theta.$$

Comme, on a
$$|f(1+r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq |r\sin^3\theta| \leq r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0.$

4 La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas car, pour $y = mx,\ m \in \mathbb{R}$, on a:
$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Donc, la limite est dépend de m.

5
$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{y} \times \frac{\sin(\frac{x}{y})}{\frac{x}{y}} = \frac{1}{\pi}.$$

Car,
$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha - 1}{\alpha} = 1.$$

6 En utilisant les coordonnées polaires, posons
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on trouve,
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\cos\theta.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0}(r\sin\theta\cos\theta) = 0.$

7

8 Par les coordonnées polaires,
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on voit que,
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}.$
la limite dépend de θ alors elle n'existe pas.

9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y-3}{x+y+1} = -3.$

10 Posons, $\alpha = xy$, donc, $\begin{cases} \alpha \longrightarrow 0 \\ \text{si } (x,y) \longrightarrow (0,0). \end{cases}$ Par conséquent, on aura
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{e^x-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\dfrac{e^{xy}-1}{xy}}{x\dfrac{e^x-1}{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$$

Car,
$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1.$$

Correction d' exercice 4 ☆

1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ par $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$.

Alors, en utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{\sin(\frac{x-y}{2})}{\frac{x-y}{2}} \times \cos(\frac{x-y}{2}) = \cos\alpha.$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{\sin(\frac{x-y}{2})}{\frac{x-y}{2}} = 1$, on a, donc,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} f(x,y) = \cos\alpha.$$

2 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$

3 On a $|\sin(2xy)| \leq 2xy$. Alors, posns:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Donc, on voit que,

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)| \leq 2e^{-(x^2+y^2)}|x||y| = 2e^{-r}r^2|\sin\theta\cos\theta|.$$

D'où,

$$0 \leq \lim_{r\to+\infty} 2e^{-r}r^2|\sin\theta\cos\theta| \leq 2r^2e^{-r} \underset{r\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Correction d' exercice 5 ☆

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par: $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

1 $1^{ière}$ Méthode: Par majoration. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} :\ 2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

Alors, par conséquent, on trouve,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} :\ 2|xy^2| \leq |y|(x^2 + y^2).$$

Donc, en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

2 $2^{ième}$ Méthode: En utilisant les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on voit que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} 2r\sin^2\theta\cos\theta = 0.$$

3 $3^{ième}$ Méthode: Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon)\ \|(x,y)-(0,0)\|_2 \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Sachant que $x^2+y^2 > y^2$, alors, an trouve

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| < \left|\frac{2xy^2}{x^2}\right| = 2|x| < 2\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Correction d' exercice 6 ☆

On étudiant la continuité des fonctions $f,\ g$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que:

1 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

On a sait que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car elle est quotient de deux fonctions continues, $(x,y) \longmapsto xy$, (polynême), et $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$, (racine carrée) de polynême). Donc, il reste de prouver la continuité en point $(0,0)$.
En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on trouve,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\cos\theta.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0}(r\sin\theta\cos\theta) = 0.$

2 $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La continuité de g sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est claire.
La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,0)$ n'existe pas, en effit, si $y = mx,\ m \in \mathbb{R}$, on trouve,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+m)x}{\sqrt{1+m^2}|x|} = \pm\dfrac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}$. Cela signifié que la limite n'existe pas.
D'où g est continue seulement sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Correction d' exercice 7 ☆

On étude la prolongement par continuité au point A du fonctions suivantes:

1 $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $A(0,0)$. On étudie la continuité en $(0,0)$. En passant aux coordonnées polaires. $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[, \end{cases}$ on obtient,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2}\right| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0.$$

Par coséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Cela prouve que f est continue en $(0,0)$. Donc elle est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $\tilde{f}$ telle que:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

2 Pour la fonction f qui définit par $f(x,y) = \dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2} + 1$, $A(2,0)$. Posons,

$\begin{cases} x = r\cos\theta + 2, \\ x = r\sin\theta, \end{cases}$ où $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, on aura donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} \frac{|\cos\theta|}{r} = +\infty.$$

Ce qui est signifier que f n'est pas prolongeable par continuité en $A(2,0)$.

3 $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $A(0,0)$. $(\star)$. Reste comme exercice.

Correction d' exercice 8 ☆☆

Montrer que les ensembles suivents sont compacts. Premièrement, rappelons que, une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

1 $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 9, \right\}$. Soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+y^2. \end{aligned}$$

Alors, f est continue, car elle est un polynôme, comme, on a

$$A = f^{-1}([0,9]),$$

et l'ensemble $[0,9]$ est fermé dans $(\mathbb{R}, |.|)$, alors, A est aussi fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$.
On a aussi $A \subseteq \overline{B}((0,0),6)$, c'est à dire A est borné. D'où la compacité de A.

2 $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1\right\}$. De même manière qui est ce précède, on peut définir l'application f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2. \end{aligned}$$

Alors, on a:

(a) $B = f^{-1}(\{1\})$, f est continue (un polynôme), et $\{1\}$ est fermé. Donc B est le aussi.

(b) La bornitude de B est conséquence de $B \subseteq \overline{B}((0,0,0),6)$. D'où la compacité de B.

Correction d'exercice supplémentaire 1 ☆☆

Montrons la continité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ telle que: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & si\ x^2+y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{si non.} \end{cases}$

Soient D l'extérieur du disque unité et E son intérieur, c'est à dire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}, \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on distinguer deux cas possibles.

1 Si le point (x_0, y_0) dans D ou E, alors f est continue, car elle est polynôme.

2 Dans le cas où le point (x_0, y_0) aux bord de D (ou E), c'est à dire $x_0^2 + y_0^2 = 1$, donc, on trouve

(a) Lorsque $(x, y) \in D$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1) = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0).$$

(b) Lorsque $(x, y) \in E$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0).$$

D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.