UNIVERSITE DE M'SILA
Faculté de Technologie
Département de Science et Technique

Année universitaire : 2014/2015
Module : TP-Méthodes numériques
S4 - 2ème Année STS

TP N°: 04

Résolution de l'équation g(x)=x :

Méthode du Point fixe

But : Dans ce TP, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations non linéaires de type $g(x) = x$, où g est une fonction non linéaire. Pour résoudre ce type de problème, on utilise la méthode du point fixe (résolution d'équations du type $g(x) = x$)
Cette méthode numérique est une méthode itérative : à partir d'une donnée x_0, on construit x_1 puis x_2, puis, pas à pas, les premiers termes de la suite $(x_k), k \in N$.

Critère d'arrêt de l'algorithme

Numériquement il faut pouvoir arrêter l'algorithme une fois que celui-ci à convergé, c'est à dire une fois que x_n est suffisamment proche de la solution exacte (notée $\bar{x}$). Nous allons pour cela définir des critères d'arrêt. Pour une tolérance $\varepsilon > 0$ donnée, il faudrait pouvoir vérifier que le module de la différence entre la solution exacte et la solution approchée est inférieur à ε, c'est à dire que :

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

Cependant, comme, en général, la solution exacte $\bar{x}$ n'est pas connue, ce critère n'est pas exploitable numériquement. Il existe quand même deux types de critères d'arrêt utilisables en pratique :

1. Contrôle du résidu : les itérations s'achèvent dès que :

$$|f(x)| < \varepsilon \ \text{(ou } |g(x_n) - \bar{x}| < \varepsilon \text{)}$$

2. Contrôle de l'incrément : les itérations s'achèvent dès que :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Nombre maximal d'itérations

En plus d'un de ces critères d'arrêt, il faut pouvoir arrêter l'algorithme lorsque celui-ci diverge ou lorsque la convergence est trop lente. On va alors définir le nombre d'itérations maximal n_{max}. L'algorithme s'arrêtera dès que $n > n_{max}$.

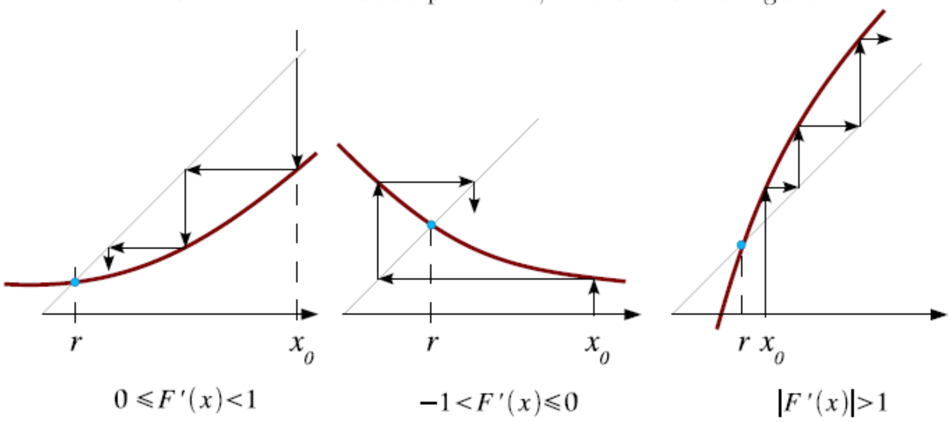
Calcul de l'erreur

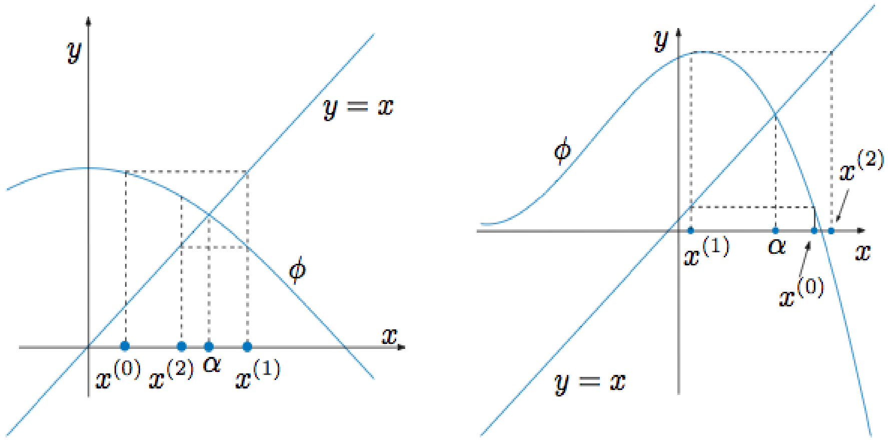
Le calcul de l'erreur sert d'une part à vérifier les estimations théoriques, et, d'autre part à comparer la vitesse de convergence différentes méthodes pour approcher la solution exacte $\bar{x}$. Ainsi, en plus du calcul d'une approximation de $\bar{x}$ on a parfois besoin de calculer l'erreur à chaque étape de l'algorithme $|e_n| = |x_n - \bar{x}|$.

De nouveau, en général, $\bar{x}$ n'est pas connue (même si $\bar{x}$ est connue sa valeur sera approchée par l'ordinateur (par exemple si $\bar{x} = pi$)). En pratique, on calculera un vecteur e tel que
$e_n = |x_n - \overline{x_a}|$.

– x_a vaut $\bar{x}$ si $\bar{x}$ est connue.
– $\overline{x_a}$ est une valeur approchée de $\bar{x}$ aussi précise que possible (calculée avec une tolérance ε très petite) sinon.

Figure 1. Méthode de point fixe, différents cas de figure





Algorithmique

On souhaite calculer une valeur approchée d'un point fixe d'une fonction g à partir de **choix d'un point x_0 donné**. Le point fixe doit être calculé avec une précision de ε donnée.
– Quels sont les paramètres d'entrée ? quels sont les paramètres de sortie ?
– Définir un critère d'arrêt pour cet algorithme.
– Ecrire l'algorithme complet de la fonction PointFixe.m.
– Ecrire l'algorithme d'une fonction supplémentaire ayant un paramètre d'entrée supplémentaire x_a et un paramètre de sortie supplémentaire le vecteur e.

Travail à réaliser :

Ecrire la fonction pintfixe.m par Matlab en se basant sur :

a). Les entrées Les sorties :

g : la fonction étudiée
zero : la racine trouvée par la méthode.
x0 : le point initial
erreur : l'erreur estimée.
Nmax : le nombre maximal d'itérations
niter : le nombre d'itérations effectuées.
tol : le critère d'arrêt (erreur tolérée)

b). Algorithme :

1. On commence par choisir le point initial x_0 ($n=0$)
2. On calcule $x_{n+1} = g(x_n)$
3. Si $|x_{n+1} - x_n| < tol$ alors la méthode a convergé, et on s'**arrête**
4. Si ***niter*** atteint ***nmax*** alors la méthode a divergé, ou elle n'a pas pu converger avec ***nmax*** itérations et on s'**arrête**.
5. Sinon, on passe à l'étape **2** pour une nouvelle itération ***n+1*** (***n*** devient ***n+1***).

Application :

a). Considérons l'équation non linéaire : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, qui admet une racine x_0 dans l'intervalle *[1, 2]*.
Trouvez trois façons d'écrire f=0 sous la forme d'un point-fixe (g_1, g_2 *et* g_3) ?
1. on fait un plot des (g_1 avec x) , (g_2 avec x) et (g_3 avec x).
2. Appliquez la fonction Matlab 'pointfixe.m' que vous avez criée sur $g_1(x)$, $g_2(x)$ *et* $g_3(x)$, en mettant : *x0=1.5, tol=0.001, nmax=50.*

3. Quelle est la fonction *(g1, g2 ou g3)* qui donne la convergence la plus rapide.

b). Toujours en Matlab, coder la méthode *Pointfixe.m*
1. Appliquer l'algorithme du point fixe pour trouver les zéros de $h(x) = 2\sin x - x$ en prenant $x_0 = [1.5 , 2]$. Après le plot de *g(x) hold on* avec le plot de *x*.

2. Remarquer que *0* est un point fixe de *h*. Appliquer l'algorithme du point fixe à h en prenant $x_0=0.01$ puis $x_0=-0.01$. Que se passe-t-il ? Expliquer.

Exercice :

On utilise le Matlab, appliquer la méthode du point fixe pour résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = x - \cos(x).$$