الأستاذ عبد المجيد معيرش

الامواج الكهرومغناطيسية

العنوان: الكهرومغناطيسية

Title: Electromagnetism

المستوى:السنة الثانية ليسانس فيزياء

Level: Second-year Licence of Physics

السداسي:الثاني

The second part of the second year

الفصــل الاول

الامواج الكهرومغناطيسية في الفراغ

Electromagnetic waves in a vacuum

تطرق في هذا الفصل لعلاقة الحقلين الكهربائي $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ و المغناطيسي $\vec{B}(\vec{r},t)$ المتغيرين بدلالة الإحداثيات و الزمن بالكمونيين الشعاعي $\vec{A}(\vec{r},t)$ والسلمي $V(\vec{r},t)$ و نستنج معادلات ماكسويل في الشكلين التفاضلي و التكاملي بالإضافة لمعادلات الانتشار و مفهوم الموجة المستوية و الطـاقة الكهرومغناطيسية.

المبادئ العامة للكهرومغناطيسية :

من الطبيعي أن يكون لكل علم من العلوم مسلمات و مبادئ يقوم عليها فالميكانيك الكلاسيكي يؤسس على قوانين نيوتن الثلاثة و للديناميكا الحرارية (الترموديناميك) مبادئها و... فكذلك للنظرية الكهرومغناطيسية المبادئ و المسلمات و البديهيات التي تقوم عليها و نلخصها بشكل عام فيمايلي:

*** إن كل جسيم مشحون بشحنة كهربائية q إذا تواجد تحت تأثير مجال كهربائي خارجي $\vec{E}$ فإنه يتأثر بقوة Lorentz الكهربائية $\vec{F}_e$ التالية:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}..................(1)$$

***و إذا تواجد الجسيم المشحون الذي يجب أن يكون متحرك بالسرعة $\vec{v}$ تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي $\vec{B}$ فإنه يتأثر بقوة Lorentz المغناطيسية $\vec{F}_m$ التالية:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \overleftarrow{B}................(2)$$

*** أما إذا تواجد هذا الجسيم تحت تأثير الحقلين الكهربائي و المغناطيسي معا و في آن واحد فأنه يخضع لتأثير قوة Lorentz الكهرومغناطيسية التالية:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})...........(3)$$

*** و لدراسة حركة الجسيم المشحون لا بد من إرجاعها لجملة غاليلية (R) أما حركة الجسيم المشحون بالنسبة لجملة غاليلية أخرى (R') تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للجملة (R) فيجب أن تستنتج إنطلاقا من تحويلات Lorentz لان معادلات ماكسويل كما سنرى فيما بعد صامدة بهذه التحويلات و هي غير صامدة بتحويلات غاليلي. حيث أن هذه التحويلات في الحالة الخاصة التي تكون فيها الجملة (R') تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للجملة (R) بسرعة ثابتة وفق المحور (Ox)كمايلي:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta Ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ Ct' = \gamma(Ct + \beta x) \end{cases}$$

حيث أن $\beta = \dfrac{V_{o'/o}}{c}$ و $\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ و c هي سرعة الضوء في الفراغ أما التحويلات المعاكسة فتستنتج بتعويض β بـ:$(-\beta)$ لتكون كمايلي:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta Ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ Ct = \gamma(Ct' + \beta x') \end{cases}$$

أما تحويلا ت السرعة تكون وفق العلاقة:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V_{o'/o}}{1 - \dfrac{v_x V}{C^2}} \\[2ex] v'_y = \dfrac{v_y \sqrt{1 - \dfrac{{V_{o'/o}}^2}{C^2}}}{1 - \dfrac{v_x V_{o'/o}}{C^2}} \\[2ex] v'_z = \dfrac{v_z \sqrt{1 - \dfrac{{V_{o'/o}}^2}{C^2}}}{1 - \dfrac{v_x V_{o'/o}}{C^2}} \end{cases}$$

و هي بديل لقانون تركيب السرعات الكلاسيكي و تؤول لقانون تركيب السرعات الكلاسيكي في حالة السرعات الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء في الفراغ.

*** إن حركة الجسيم المشحون الذي كتلة سكونه m_0 و شحنته الكهربائية q تعرف في اللحظة t بتعيين شعاع الموضع $\vec{r}(x,y,z)$ و السرعة اللحظية $\vec{v}(v_x,v_y,v_z)$ بالنسبة للجملة العطالية (R) و نقبل بأن كتلة السكون و الشحنة الكهربائية مقادير فيزيائية صامدة أي أنها تأخذ نفس القيمة في كل المعالم العطالية التي تتحرك حركات مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها البعض و يتحقق فيها مبدأ العطالة (يكون فيها الجسم المعزول إما سكنا أو يتحرك حركة مستقيمة منتظمة).

*** نقبل أيضا أن الظواهر الكهربائية و المغناطيسية تعين إنطلاقا من كمون رباعي $A^{\mu}(x,y,z,ct)$ مركباته في فضاء مينكوفسكي رباعي البعد $A^{\mu}(\vec{A},\frac{V}{C})$ حيث يمثل $\vec{A}$ الكمون الشعاعي الكلاسيكي و V الكمون السلمي وترتبط بمركبات نفس الكمون $A'^{\mu}(x',y',z',ct')(\vec{A}',\frac{V'}{C})$ في الجملة (R') التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالسرعة $\vec{V}_{o'/o}$ وفق المحور (Ox) حسب علاقات التحويل التالية:

$$\begin{cases} A_x = \gamma(A'_x + \beta V'/C) \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ \dfrac{V}{C} = \gamma(\dfrac{V'}{C} + \beta A'_x) \end{cases}$$

بينما التحويلات المعاكسة فتستنتج بتعويض β بـ: $(-\beta)$ لتكون كمايلي:

$$\begin{cases} A'_x = \gamma(A_x - \beta V/C) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)' \\ \dfrac{V'}{C} = \gamma(\dfrac{V}{C} - \beta A_x) \end{cases}$$

حيث أن مربع الكمون الرباعي يكون صامد بتحويلات Lorentz المشار إليها أعلاه:

$$\vec{A}^2 - \frac{V^2}{c^2} = \vec{A'}^2 - \frac{V'^2}{c^2}$$

*** إن لاغرنجيان جسيم مشحون ℓ يتحرك بالسرعة $\vec{v}$ تحت تأثير حقلين مغناطيسي و كهربائي مشتقين من الكمون الرباعي A^{μ} يعطى بالعبارة التالية:

$$L=-m_0C^2\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}+q\left(\vec{A}\vec{v}-V\right)......(5)$$

إن الحد الأول في عبارة اللاغرنجيان يصف حركة جسيم حر (الجسيم الذي لا يتأثر بالقوى الخارجية أو الجسيم المعزول) بينما الحد الثاني يصف التفاعل المتبادل بين الجسيم المشحون و الحقل الكهرومغناطيسي الخارجي حيث أن عبارتي اللاغرنجيان الحر و لاغرنجيان التفاعل هما على التوالي:

$$\begin{cases} L_{libre}=-m_0C^2\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}} \\ L_{\text{int}\,eraction}=q\left(\vec{A}\vec{v}-V\right) \end{cases}$$

و بتطبيق معادلات لاغرانج_إيلر من الصنف الأول التالية نجد معادلة حركة جسيم مشحون تحت تأثير حقل كهرومغناطيسي خارجي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0...(6)$$

حيث $x_i(x,y,z)$ تمثل الإحداثيات الديكارتية و $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$. في البداية لنطبق المعادلة (6) على المتغير x حيث تكتب معادلة Euler_Lagrange كمايلي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

يمكن ملاحظة أن الحد الأول من هاته المعادلة و هو $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$ يكتب كمايلي بالنظر للمعادلة (5):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{dP_x}{dt}+q\frac{dA_x}{dt}$$

حيث P_x تمثل مركبة كمية الحركة $\vec{P}$ وفق المحور (Ox) أما العبارة $\frac{dA_x(x,y,z,t)}{dt}$ فهي وفق المعادلة:

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}$$

في حين أن الحد $\frac{\partial \ell}{\partial x}$ يأخذ الشكل التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

و بالتالي نجد بكل سهولة:

$$\frac{1}{q}\frac{dP_x}{dt}=-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial x}+\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

و بنفس الطريقة تماما نجد المعادلتين التاليتين (نغير الإحداثيات بشكل دوري $(x\to y\to z\to x)$ لنجد مايلي:

$$\begin{cases}\frac{1}{q}\frac{dP_y}{dt}=-\frac{\partial A_y}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial y}+\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{q}\frac{dP_z}{dt}=-\frac{\partial A_z}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial z}+\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\dot{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\end{cases}$$

و بما أنه حسب المبدأ الأساسي للتحريك (القانون الثاني لنيوتن) يمكن أن نكتب:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\text{..........................}(7)$$

يكون لدينا:

$$\vec{F}=q\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V+\vec{v}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\right)..............(8)$$

و بالمطابقة مع المعادلة (3) نجد أن الحقل الكهرومغناطيسي $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ يكتب بدلالة الكمون الرباعي $\left(\vec{A},\frac{V}{C}\right)$ كمايلي:

$$\begin{cases}\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=-\dfrac{\partial\vec{A}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}-\vec{\nabla}V\left(\vec{r},t\right)\\ \vec{B}\left(\vec{r},t\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\left(\vec{r},t\right)\end{cases}.........................(9)$$

نلاحظ أنه في حالة نظام متغير مع الزمن أن الحقل الكهربائي لا يعين فقط إنطلاقا من الكمون السلمي فقط بل من الكمونيين السلمي و الشعاعي. من الواضح أنه في حالة الكهرباء الساكنة و المغناطيسية الساكنة نستنتج من المعادلة (9) مايلي:

$$\begin{cases}\vec{E}\left(\vec{r}\right)=-\vec{\nabla}V\\ \vec{B}\left(\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\end{cases}..(9)'$$

معادلة الاستمرارية:

لإيجاد المعادلة الفيزيائية المميزة لانحفاظ الشحنة الكهربائية نعتبر وسط كيفي (وسط مادي أو الفراغ) يحوي توزيع شحني حجمي كثافته الحجمية متغيرة مع الزمن و الإحداثيات $\rho\left(\vec{r},t\right)$ و بالتالي تكون كمية الكهرباء الموجودة في عنصر الحجم $d^3\vec{r}$ كمايلي:

$$dq=\rho\left(\vec{r},t\right)d^3\vec{r}...(10)$$

إذا كان $\vec{v}\left(\vec{r},t\right)$ حقل السرعات التي تتحرك به الشحنات الكهربائية في نقطة معينة من الفضاء بدلالة الزمن t فإن شعاع كثافة التيار $\vec{j}\left(\vec{r},t\right)$ يعرف كمايلي:

$$\vec{j}\left(\vec{r},t\right)=\rho\left(\vec{r},t\right)\vec{v}\left(\vec{r},t\right)..(11)$$

و بالتالي تكون كمية الكهرباء الموجودة في حجم τ معين من الفضاء معطاة بالعبارة التالية:

$$q=\iiint\rho\left(\vec{r},t\right)d^3\vec{r}..(12)$$

هاته الشحنة من أجل حجم معين أو ثابت تكون دالة للزمن فقط و بالتالي يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\frac{dq}{dt}=\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3\vec{r}..(13)$$

لنعتبر أن الحجم τ محدد بسطح مغلق (S) وليكن $d\vec{s}$ عنصر السطح في نقطة M كيفية من السطح و بالتالي يكون كل من الكثافة الشحنية و حقل السرعات في مجال عنصر السطح المعتبر متعلقان بـ: M و الزمن t و بالتالي تكون كمية الكهرباء التي تخرج عبر عنصر السطح بين اللحظة t و اللحظة $(t+dt)$ هي:

$$\rho(M,t)\vec{v}(M,t)dtd\vec{s}.........\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ .(14)$$

حيث $\vec{v}(M,t)dtd\vec{s}$ تمثل حجم أسطوانة متناهية في الصغر قاعدتها dS و مولداتها $\vec{v}dt$ و بالتالي تكون كمية الكهرباء dq_s التي تخرج من السطح المغلق (S) خلال الفترة dt تعطى بالعبارة التالية:

$$dq_s = \oiint \rho(M,t)\vec{v}(M,t)dtd\vec{s}..(15)$$

و بالتالي يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\frac{dq_s}{dt} = \oiint \rho(M,t)\vec{v}(M,t)d\vec{s}.........\ ....\ ....\ ....\ ....(16)$$

و بتطبيق مبدأ إنحفاظ الشحنة الكهربائية:

$$dq = -dq_s..............................\ ....\ ....(17)$$

و باستعمال المعادلتين (13) و (16) يمكن كتابة:

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} + \oiint \rho(M,t)\vec{v}(M,t)d\vec{s} = 0.........\ ....\ ....(18)$$

و باستعمال تعريف شعاع كثافة التيار و المعادلة (18) يمكن كتابة مايلي:

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} + \oiint \vec{j}d\vec{s} = 0.....................(19)$$

و بتطبيق نظرية Ostrogradski على شعاع كثافة التيار التالية:

$$\oiint \vec{j}d\vec{s} + \iiint_{\tau} div\,\vec{j}d^3\vec{r} = 0.........\ ....\ ....\ ....(20)$$

و بالاستعانة بالمعادلة (19) يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} \right) d^3\vec{r} = 0.........\ ....\ ....\ ....(\ 21)$$

إن هاته المعادلة التكاملية صالحة من أجل أي حجم محاط بأي سطح مغلق و بالتالي يمكن إستنتاج مايلي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0.........\ ....\ ....\ ....\ .....(22)$$

وهي ما تعرف بمعادلة الاستمرارية أو معادلة إنحفاظ الشحنة الكهربائية و بالإمكان كتابتها بالشكل التكاملي التالي لإعطائها تفسير فيزيائي مفيد:

$$-\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} = \oiint \vec{j}d\vec{s} = 0.........\ ....\ ....\ ....(23)$$

إن تدفق شعاع كثافة التيار $\vec{j}$ عبر السطح أي التيار المخترق للسطح المغلق يكون مصدره كمية الكهرباء الموجودة داخل هذا السطح التي تتناقص بنفس الكمية التي يزداد بها التدفق و هو ما يعني أن الشحنة الكهربائية محفوظة.

قانون فارادي _ هنري:

من بين الظواهر المتعددة للكهرومغناطيسية ظاهرة التحريض الكهرومغناطيسي الذي أكتشف بتزامن من قبل العالمين فارادي و هنري سنة 1830 إذا اعتبرنا ناقلا كهربائيا يكون دارة مغلقة موجودة تحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي متغير مع الزمن $\vec{B}(\vec{r},t)$ يلاحظ مرور تيار كهربائي في الدارة. إن وجود التيار الكهربائي يدل على القوة المحركة الكهربائية V_ε التي تؤثر في الدارة و قياس هاته القوة يبين أنها تتعلق بسرعة تدفق الحقل المغناطيسي Φ_B لكن بإشارة معاكسة أي:

$$\begin{cases} V_\varepsilon \langle 0 \Rightarrow \dfrac{d\Phi_B}{dt} \rangle 0 \\ V_\varepsilon \rangle 0 \Rightarrow \dfrac{d\Phi_B}{dt} \langle 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

يلاحظ أن شدة القوة المحركة الكهربائية تزداد بزيادة التدفق لكن بإشارة معاكسة:

$$V_\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

حيث Φ_B يعطى بالعبارة التالية:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} d\vec{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

كما نعلم أن القوة المحركة الكهربائية V_ε تنتج حقل كهربائي يرتبط بها عن طريق العلاقة التالية:

$$V_\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

باستعمال المعادلات (25) و (26) و (27) يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\iint \vec{B} d\vec{s}}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

إن وجود حقل مغناطيسي متغير مع الزمن يؤدي إلى وجود حقل كهربائي متغير مع الزمن بحيث تجوال الحقل الكهربائي عبر محيط مغلق و موجه يساوي إلى التناقص في سرعة تدفق الحقل المغناطيسي عبر السطح غير المغلق المرتكز على المحيط المغلق. و لكتابة الشكل التفاضلي للمعادلة التكاملية (28) نطبق نظرية Stokes على الحقل الكهربائي كمايلي:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iint \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) d\vec{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

و باستعمال المعادلتين (28) و (29) يمكن كتابة مايلي:

$$\iint \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{s} = 0 ....(30)$$

و بما أن هاته المعادلة تكون صالحة من أجل أي سطح غير مغلق مرتكز على أي محيط مغلق و بالتالي يجب أن تتحقق المعادلة المحلية التالية:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ....(31)$$

و هي تعرف بالشكل التفاضلي لقانون فاراداي-هنري التجريبي أو معادلة التحريض الكهرومغناطيسي. و يمكننا أن نلاحظ من خلال المعادلة (31) أن وجود الحقل الكهربائي المتغير مع الزمن ينتج في نفس الوقت حقل مغناطيسي متغير مع بدلالة الإحداثيات و الزمن و العكس صحيح أيضا لأنه من الواضح أن وجود حقل مغناطيسي متغير بدلالة الزمن يؤدي إلى وجود متزامن لحقل كهربائي متغير مع الزمن و بالتالي في حالة نظام غير مستقر (متغير بدلالة الزمن) لا نتكلم عن الحقل الكهربائي فقط أو المجال المغناطيسي فقط و إنما الحقلين معا و بتزامن أي أننا نتكلم عن الحقل الكهرومغناطيسي أو الموجة الكهرومغناطيسية.

و الجدير بالملاحظة أن المعادلة (31) في حالة الكهرباء الساكنة و المغناطيسية الساكنة تصبح:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 ....(31)'$$

و هي خاصية يحققها الحقل الكهربائي الساكن لان العمل المنجز من قبل القوة الكهربائية عبر مسار مغلق يكون معدوم.

أحادية الحقل الكهرومغناطيسي:

إن الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ مقداران فيزيائيان يعينان في كل لحظة زمنية t و في كل نقطة من الفضاء بصورة وحيدة بينما الكمون الرباعي A^{μ} المعرف سابقا لا يعين بشكل وحيد بحيث يمكن تعيين الحقل الكهرومغناطيسي إنطلاقا من أكثر من كمون. لنرى الآن ذلك بشكل مفصل. إذا فرضنا أن $A'^{\mu}\left(\vec{A}, \frac{V'}{c}\right)$ كمون آخر فيمكن كتابة الحقل $\vec{B}$ باعتباره حقل وحيد كمايلي:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A}' ....(32)$$

و بالتالي نستطيع كتابة المعادلة:

$$\vec{\nabla} \Lambda \left(\vec{A} - \vec{A}' \right) = 0 ....(33)$$

و بما أنه من أجل أي دالة سلمية كيفية f يمكن التحقق بكل سهولة من المعادلة التالية (أنظر الملحق):

$$\overrightarrow{Rot\left(\overrightarrow{grad\, f}\right)} = \vec{\nabla} \Lambda \left(\overrightarrow{grad\, f} \right) = 0 ....(34)$$

و بالتالي يمكننا كتابة المعادلة التالية:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f ....(35)$$

و باستعمال المعادلة (9) يمكن كتابة مايلي لنفس السبب السابق:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V=-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}-\vec{\nabla}V'................(36)$$

و بالتالي نجد بعد التبسيط:

$$\vec{\nabla}\left(V'-V\right)=\frac{\partial\left(\vec{A}-\vec{A}'\right)}{\partial t}..........................(37)$$

أما الآن فنستعمل المعادلتين (36) و (37) لنجد:

$$V'=V-\frac{\partial f}{\partial t}+cte...............................(38)$$

و بالتالي يمكن تعيين الحقل الكهرومغناطيسي إنطلاقا من الكمون الرباعي A'^{μ} المرتبط بالكمون A^{μ} عن طريق العلاقات المستنتجة من المعادلتين (35) و (38) كمايلي:

$$\begin{cases}\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}f\\ V'=V-\dfrac{\partial f}{\partial t}+cte\end{cases}.......... ....(39)$$

بما أن الدالة السلمية f كيفية فهناك عدة صيغ في لاختيارها من أجل تبسيط معادلات الانتشار وإيجاد الحلول الفيزيائية لها بأقل التكاليف الرياضية. هناك اختياران رئيسيان يسمى الأول شرط معايرة Lorentz ويسمى الثاني شرط معايرة Colomb و هما على التوالي:

$$div\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}=0.........................(40)$$

و:

$$div\vec{A}=0...(41)$$

و النتائج الفيزيائية بشكل عام مستقلة عن شروط المعايرة فقط شروط المعايرة من شأنها أن توصلنا للنتائج الفيزيائية بأقصر الطرق و أقل التكاليف الرياضية فهي تبسط صيغ معادلات الانتشار كما سنرى فيما بعد.

معادلات ماكسويل في الفراغ:

توجد أربعة معادلات لماكسويل منها معادلتان سلميتان و معادلتان شعاعيتان أي 8 معادلات سلمية في المجموع تصنف إلى صنفين يحدد الصنف الأول منابع الحقل الكهرومغناطيسي و الثاني خواص الحقل الكهرومغناطيسي:

الصنف الاول من معادلات ماكسويل:

لاستنتاج المعادلات المميزة للصنف الأول ننطلق من المعادلة (9) و بتطبيق المتطابقة التالية (أنظر الملحق):

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{A}\right)=0\text{.................................}(42)$$

يمكن استنتاج المعادلة الأولى من معادلات ماكسويل:

$$div\vec{B}=0\text{...}(43)$$

و لإعطائها معنى فيزيائي ملائم نكتبها في الصيغة التكاملية و لأجل ذلك نعتبر حجم τ محاط بسطح (S) مغلق وبالتالي يمكن أن نستنتج إنطلاقا من المعادلة (43) مايلي:

$$\iiint\left(div\vec{B}\right)d^{3}\vec{r}=0\text{..............................}(44)$$

نستعمل نظرية Ostrogradski لنجد:

$$\oiint_{S}\vec{B}d\vec{s}=0\text{.....................................}(45)$$

و هي تعني أن تدفق الحقل المغناطيسي عبر سطح مغلق و موجه معدوم بمعنى أن عدد خطوط مجال الخطوط المغناطيسي التي تخترق السطح من الداخل إلى الخارج تساوى عدد خطوط المجال التي تخترق السطح من الخارج إلى الداخل و نقول عن التدفق أنه محفوظ.

أما الآن فنستعمل المعادلة (9) ونطبق على الطرفين مؤثر الدوران لنجد:

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}=-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{A}\right)}{\partial t}-\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}V\right)\text{.................}(46)$$

نستعمل المعادلتين (34) و (46) حيث أن الحد الثاني يكون معدوم لنجد بكل سهولة:

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{...}(47)$$

و هي نفس المعادلة المستنتجة تجريبيا في ظاهرة التحريض الكهرومغناطيسي و بالتالي فهي تفسر هاته الظاهرة.

الصنف الثاني من معادلات ماكسويل:

أما الصنف الثاني من معادلات ماكسويل لتعيينه ننطلق من نظرية Ampère في المغناطيسية الساكنة التالية:

$$\oint_{l}\vec{B}d\vec{l}=\mu_{0}I\text{..}(48)$$

حيث μ_0 تمثل النفاذية المغناطيسية في الفراغ و I التيار الكهربائي الذي يمر في دارة مغلقة و يخترق سطح غير مغلق مرتكز على محيط مغلق. و بتطبيق نظرية Stokes على الحقل المغناطيسي التالية:

$$\oint_{l}\vec{B}d\vec{l}=\iint_{s}\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}\right)d\vec{s}\text{............................}(49)$$

حيث S يمثل السطح الغير مغلق المرتكز على المحيط الموجه و المغلق l .

الآن نستعمل المعادلتين (49) و (48) لنجد بعد التبسيط:

$$\iint\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}-\mu_0\vec{j}\right)d\vec{s}=0............................(50)$$

و بما أن هاته المعادلة التكاملية صالحة من أجل أي محيط مغلق أي سطح غير مغلق يرتكز عليه و بالتالي يجب أن يتحقق:

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}=\mu_0\vec{j}...............................(51)$$

إذا استعملنا المعادلتين (42) و (5) يمكن أن نستنتج مايلي:

$$\vec{\nabla}\vec{j}=div\vec{j}=0...............................(52)$$

من الواضح أن هاته المعادلة تتناقض مع معادلة الاستمرارية (22) في حالة نظام متغير مع الزمن لان:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0...............................(53)$$

يمكن أن نبين نظرية Gauss في شكلها التفاضلي التالي:

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}............................(54)$$

باستعمال المعادلتين (42) و (54) نجد بسهولة:

$$div\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0.........................(55)$$

نقوم الآن بتعويض $\vec{j}$ الموجودة في المعادلة (51) بالمقدار: $\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ لنتحصل عل المعادلة:

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)..................(56)$$

يمكن أن نتأكد بسهولة المعادلة (56) منسجمة مع معادلة الاستمرارية و هي المعادلة الرابعة من معادلات ماكسويل. يسمى المقدار $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ بتيار الإزاحة و المقدار $\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ بالتيار الكلي.

لنعتبر دارة كهربائية مغلقة و (C) محيط مغلق يرتكز عليه سطح غير مغلق و نطبق نظرية Stokes التالية:

$$\iint \left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}\right)d\vec{s} = \oint \vec{B}d\vec{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(57)$$

نستعمل الآن المعادلتين (56) و (57) لنجد بسهولة:

$$\oint_l \frac{\vec{B}}{\mu_0}d\vec{l} = \iint_s \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(58)$$

و هي تعني أن تجوال الحقل $\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}$ عبر محيط مغلق و موجه يساوي إلى تدفق مؤثر شعاع كثافة التيار الكلي عبر السطح غير المغلق المرتكز على المحيط المغلق. و فيمايلي نلخص معادلات ماكسويل الأربعة في الفراغ في جدول نحدد فيه الصيغة التفاضلية و الصيغة التكاملية و المعنى الفيزيائي لكل معادلة من المعادلات و ذلك في الصفحة الموالي

جدول يلخص معدلات ماكسويل

المعادلة	الصيغة التفاضلية	الصيغة التكاملية	المعنى الفيزيائي
1	$div\vec{B} = 0$	$\oiint_s \vec{B}d\vec{s} = 0$	تدفق الحقل المغناطيسي عبر سطح مغلق و موجه يكون معدوم(التدفق محفوظ) **عدم وجود الشحنة المغناطيسية**
2	$\overrightarrow{Rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}d\vec{s}$	تجوال الحقل الكهربائي عبر محيط مغلق و موجه يساوي إلى التناقص في سرعة تدفق المغناطيسي عبر السطح غير المغلق المرتكز على المحيط المغلق **ظاهرة التحريض الكهرومغناطيسي**
3	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_s \left(\varepsilon_0\vec{E}\right)d\vec{s} = \sum q_{\text{int}}$	تدفق الحقل $\varepsilon_0\vec{E}$ عبر سطح مغلق و موجه يساوى مجموع الشحن الموجودة داخله **نظرية Gauss**
4	$\overrightarrow{Rot\frac{\vec{B}}{\mu_0}} = \left(J + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$	$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0}d\vec{l} = \iint_s \left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{s}$	تجوال الحقل $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ عبر محيط مغلق و موجه يساوي إلى تدفق شعاع التيار الكلى $\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ عبر السطح الغير مغلق المرتكز على المحيط المغلق **معادلة:Maxwell Ampère**

معادلات الانتشار:

لتعيين معادلات الانتشار الخاصة بالكمون السلمي V نستعمل المعادلتين (54) و (9) لنجد مايلي:

$$-\frac{\partial\left(div\vec{A}\right)}{\partial t}-\Delta V=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{.............................}(59)$$

و فيمايلي نستعمل شرط معايرة Lorentz لتصبح معادلة الانتشار وفق العبارة المبسطة التالية التي هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة للإحداثيات الفضائية و الزمن :

$$\Delta V-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{.............................}(60)$$

و لإيجاد معادلة انتشار الكمون الشعاعي $\vec{A}$ نستعمل المعادلتين (56) و (9) لنجد:

$$\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\text{.....}(61)$$

و باستعمال خاصية الجداء الشعاعي المضاعف التالية (أنظر الملحق):

$$\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}\text{...........................}(62)$$

و بعد حساب بسيط نجد معادلة إنتشار الكمون الشعاعي $\vec{A}$ التالية:

$$\Delta\vec{A}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\text{......... ....}(63)$$

إن الحلول الفيزيائية العامة للمعادلتين (60) و (63) هما:

$$\begin{cases}\vec{A}\left(\vec{r}_p,t\right)=\dfrac{\mu_0}{4\Pi}\displaystyle\iiint_{\tau}\frac{\vec{j}\left[s,t-\dfrac{r_p}{c}\right]}{r_p}d^3\vec{r}\\[2ex] V\left(\vec{r}_p,t\right)=\dfrac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_{\tau}\frac{\rho\left[s,t-\dfrac{r_p}{c}\right]}{r_p}d^3\vec{r}\end{cases}\text{.......... ....}(64)$$

حيث S يمثل المنبع. من خلال الحلول نلاحظ أن المعلومات التي تصل للنقطة P في اللحظة t تكون متأخرة بالزمن $\frac{r_p}{c}$ عن المنبع.

أما الآن فننطلق من معادلة التحريض الكهرومغناطيسي (47) و نستعمل المعادلتين (62) و(43) لنجد معادلة إنتشار الحقل الكهربائي التالية:

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho / \varepsilon_0 \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

لايجاد معادلة إنتشار الحقل المغناطيسي فننطلق من المعادلة (56) نستعمل المعادلتين (62) و (47) لنجد معادلة إنتشار الحقل اللمغناطيسي التالية:

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla}\Lambda\vec{j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

و في حالة الموجة الكهرومغناطيسية التي تنتشر في وسط لا توجد به شحن و لا تيارات أي عندما تكون $\rho = 0$ و $\vec{j} = 0$ تصبح المعادلات كمايلي (60)و (63) و (65) و (66) كمايلي:

$$\begin{cases} \Delta V - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

و بوضع:

$$\otimes = \Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

الذي يسمي بمؤثر الدالامبارسيان تصبح معادلات الانتشار السابقة كمايلي:

$$\begin{cases} \otimes V = 0 \\ \otimes \vec{A} = 0 \\ \otimes \vec{E} = 0 \\ \otimes \vec{B} = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)'$$

إن الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة يجب أن تكون متعلقة بالإحداثيات الفضائية و الزمن في نفس الوقت و بالتالي مكاملة المعادلات التفاضلية التي تخص الانتشار لا تأخذ بعين الاعتبار الحدود المستقلة عن الزمن و تعتبر غير معنية بظاهرة الانتشار وبالتالي تعتبر معدومة. من المهم الإشارة إلى العلاقة بين السماحية الكهربائية في الفراغ ε_0 و النفاذية المغناطيسية μ_0 سرعة الضوء في الفراغ C هي كمايلي:

$$\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$$

إن هاته العلاقة رغم بساطتها إلا أنها تحمل معنى فيزيائي مهم جدا و هو إمكانية الجمع بين الظواهر الكهربائية و الظواهر المغناطيسية و الضوء في نظرية واحدة. و بالتالي تصبح معادلات الانتشار الموحدة في الفراغ كمايلي:

$$\begin{cases} \otimes S = 0 \\ S = \{V, A_x, A_y, A_z, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\} \end{cases}$$

الطاقة الكهرومغناطيسية:

من الطبيعي أن الحقل الكهرومغناطيسي المنتشر يلزمه طاقة كهرومغناطيسية. في هاته الفقرة سنبين كيف يمكن للطاقة الكهرومغناطسية الانتشار و ما المسؤول على ذلك. لنعرف شعاع (Poyntyng) $\vec{P}$ بدلالة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي كمايلي:

$$\vec{P} = \vec{E} \Lambda \frac{\vec{B}}{\mu_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

لنستعمل المتطابقة التالية (أنظر الملحق):

$$div\left(\overleftarrow{A} \Lambda \vec{B}\right) = \vec{B}\,\overrightarrow{Rot \vec{A}} - \vec{A}\,\overrightarrow{Rot \vec{B}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

بالاستعانة بمعادلات ماكسويل (47) و (56) و المعادلتين (68) و (69) يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + div\left(\vec{E} \Lambda \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{E}\vec{j} \ldots (70)$$

و بما أنه يمكن كتابة العبارتين $\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ و $\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{E} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} \\ \vec{B} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} \end{cases}$$

فإنه بالا مكان كتابة المعادلة (70) كمايلي:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+div\vec{P}=-\vec{E}\vec{j}\text{..........................}(71)$$

حيث تعطى ω بالعبارة التالية:

$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}\text{......................}(72)$$

و هي تمثل كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية أو الطاقة الكهرومغناطيسية الموجودة في وحدة الحجم و هي تساوي مجموع حدين الأول يعبر عن كثافة الطاقة الكهربائية و الحد الثاني يعبر عن كثافة الطاقة المغناطيسية بينما الحد $\left(-\vec{E}\vec{j}\right)$ يعبر عن الطاقة الضائعة على هيئة مفعول جول.

إذا إعتبرنا حجم كيفي يحوي توزيع شحني حجمي كثافته متغيرة مع الزمن و محاط بسطح مغلق و نطبق نظرية Ostrogradski فيمكن أن نكتب المعادلة (71) في الصيغة التكاملية كمايلي:

$$\oiint_S \overline{P}\,d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\iiint_\tau \omega d^3\vec{r}-\iiint_\tau \vec{E}\vec{j}\,d^3\vec{r}\text{..........}(73)$$

أي أن الطاقة الكهرومغناطيسية المتدفقة عبر السطح المغلق يؤدي إلى نقصان الطاقة الكهرومغناطيسية الحجمية و من الطبيعي أن تكون هناك طاقة ضائعة على شكل حرارة و يعبر ذلك الحد الأخير من المعادلة الأخيرة.

الامواج الكهرومغناطيسية المستوية:

نقول عن الموجة الكهرومغناطيسية أنها مستوية إذا كان كل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ و الكمون الشعاعي $\vec{\mathrm{A}}$ تتعلق بإلاحداثي الفضائي الموافق لاتجاه الانتشار و الزمن t. إن المعادلة (9) تبن أن $\left(-\overrightarrow{grad\ \mathrm{V}}\right)$ يعطينا الحد المستقل عن الزمن في الكهرباء الساكنة و بالتالي استنادا لما سبق ذكره في الفقرة التي تلي المعادلة (67) فإن هذا الحد غير معني بالانتشار و بالتالي في حالة الأمواج المنتشرة ستؤول المعادلة (9) إلى مايلي:

$$\begin{cases}\vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \text{.......... ....}(74)\\ \vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\end{cases}$$

و بالتالي فشروط معايرة كل من Lorentz و Colomb تتطابق و يصبح كل منهما:

$$div\vec{\mathrm{A}}=0\text{........ ....}(75)$$

إذا إعتبرنا أن إتجاه الانتشار يكون وفق المحور (OX) فإن $\vec{E}(x,\mathrm{t})$ و $\vec{B}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ و $\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ يعتلقون بالاحداثية x و الزمن t و بالتالي إنطلاقا من الشرط (75) ينتج لدينا:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0 \qquad (76)$$

و بالتالي فإن المركبة A_x مستقلة عن الاحداثي الموافق لاتجاه الانتشار x و بما أن مركبة الحقل الكهربائي وفق المحور (Ox) حسب المعادلة (74) يمكن كتابتها كمايلي:

$$E_x=-\frac{\partial A_x}{\partial t} \qquad (77)$$

و بالتالي حسب المعادلتين (76) و (77) ينتج لدينا:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \qquad (78)$$

أي أن مركبة الحقل الكهربائي وفق المحور (Ox) مستقل عن المتغير x و إنطلاقا من معادلات الانتشار (67) يمكن كتابة:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}=0 \qquad (79)$$

يمكن أن نبين إنطلاقا من المعادلتين (76) و (77) أن المعادلة (79) تعطي المعادلة التالية:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=0 \qquad (80)$$

أي أن المركبة E_x مستقلة عن الزمن و حسب المعادلة (78) مستقلة عن x و بالتالي فهي ثابت يمكن إعتباره معدوم بالنسبة لظاهرة الانتشار:

$$E_x=0 \qquad (81)$$

بالإمكان كتابة مركبة الحقل المغناطيسي وفق المحور (Ox) المعادلة (74) كمايلي:

$$B_x=\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad (82)$$

و بما أن المركبتين $A_y(x,t)$ و $A_z(x,t)$ و بالتالي حسب المعادلة (82) معدومة أي:

$$B_x=0 \qquad (83)$$

و بالتالي تكون المركبات $(E_y, E_z, B_y, B_z, A_y, A_z)$ غير معدومة و تحقق نفس معادلة الانتشار التالية:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

حيث تمثل S إحدى المركبات السابقة. و لحل المعادلة (84) نضع:

$$\begin{cases} \alpha = t - \dfrac{x}{c} \\ \beta = t + \dfrac{x}{c} \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

أو:

$$\begin{cases} \alpha = ct - x \\ \beta = ct + x \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)'$$

يمكن أن نبين أن $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ تكتب بدلالة α و β كمايلي:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta}$$

أما العبارة $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ فيمكن كتابتها كمايلي:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

في حين أن العبارة $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ تحسب بنفس الطريقة تماما لنجد:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial S}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial S}{\partial \alpha}c+\frac{\partial S}{\partial \beta}c\right]$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}c+\frac{\partial S}{\partial \beta}c\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}c+\frac{\partial S}{\partial \beta}c\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2}+2\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta}..............(**)$$

و عليه طبقا لمعادلة الانتشار (84) و كل من المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد بسهولة:

$$\frac{\partial^2 S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta}=0..(86)$$

نكامل هاته المعادلة بالنسبة للمتغير α حيث ثابت التكامل تابع للمتغير β لنحصل على مايلي:

$$\frac{\partial \mathrm{S}(\alpha,\beta)}{\partial \beta}=f(\beta)..(87)$$

و أخير لنجد عبارة $S(\alpha,\beta)$ نكامل المعادلة (88) بالنسبة للمتغير β و يكون ثابت التكامل تابع للمتغير α لنتحصل على:

$$S(\alpha,\beta)=\mathrm{F}(\beta)+G(\alpha)..................................(88)$$

حيث $\mathrm{F}(\beta)$ دالة أصلية للدالة $\mathrm{f}(\beta)$ أما عبارة S بدلالة x و t فتكون نتيجة للمعادلة (88):

$$S(\mathrm{x},t)=\mathrm{F}\left(t+\frac{x}{c}\right)+G\left(t-\frac{x}{c}\right)..........................(89)$$

أو:

$$S(\mathrm{x},t)=\mathrm{F}(ct+x)+G(ct-x)..........................(89)'$$

إن الحل $G\left(t-\frac{x}{c}\right)$ يمثل موجة كهرومغناطيسية منتشرة وفق المحور (Ox) بالسرعة C بينما الحل $\mathrm{F}\left(t+\frac{x}{c}\right)$ يمثل موجة كهرومغناطيسية منتشرة وفق المحور $(\mathrm{-Ox})$ بالسرعة $(\mathrm{-C})$ أي موجة منعكسة. سنهتم الآن بالأمواج المنتشرة و بالتالي تكون حلول الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_y\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \quad \text{...}(90) \\ E_z = E_z\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = B_y\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \quad \text{...}(90)' \\ B_z = B_z\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = A_y\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \quad \text{...}(90)'' \\ A_z = A_z\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$

و يمكننا أن نعبر عن مركبات الحقل الكهرومغناطيسي بدلالة مركبات الكمون الشعاعي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\dfrac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial \alpha} \quad \text{...}(91) \\ E_z = -\dfrac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial \alpha} \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_z}{\partial \alpha} \\ B_z = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_y}{\partial \alpha} \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(91)'$$

يمكن أن نبين وبكل سهولة إنطلاقا من الحلول (91) أن الخواص التالية محققة:

$$\begin{cases} \vec{E}\vec{B} = 0 \\ .\vec{E}\vec{e}_{=x} = 0 \\ \vec{B}\vec{e}_x = 0 \\ \left|\vec{B}\right| = \dfrac{\left|\vec{E}\right|}{c} \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(92)$$

و بالتالي $\left(\vec{E}, \vec{\mathrm{B}}, \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}\right)$ تشكل ثلاثي مباشر أي أنها متعامدة مثنى-مثنى و بشكل عام إذا كان إتجاه الانتشار $\vec{n}$ فإنه يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\vec{B} = \frac{\vec{n}\Lambda\vec{E}}{c} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(93)$$

الامواج الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون (الجيبية):

نقول عن الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة أنها وحيدة اللون أو جيبية إذا كانت مركبات الكمون الشعاعي تأخذ الصيغة التالية المحور Ox هو إتجاه الانتشار:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_{\mathrm{x}} = 0 \\ A_y = A_{0y}\sin\left(wt - kx + \varphi_{0y}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(94) \\ A_z = A_{0z}\sin\left(wt - kx + \varphi_{0z}\right) \end{cases}$$

حيث k قيمة الشعاع الموجي و ω هي التواتر و $\mathrm{A}_{0\mathrm{y}}$ و $\mathrm{A}_{0\mathrm{z}}$ السعات بينما φ_{0y} و $\varphi_{0\mathrm{z}}$ تمثل الأطوار الابتدائية و يمكن كتابة المعادلة (94) بصيغة مكافئة كمايلي:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_{\mathrm{x}} = 0 \\ A_y = A_{0y}\sin\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \\ A_z = A_{0z}\sin\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(95) \end{cases}$$

حيث φ_0 تعطى بالعبارة التالية:

$$\varphi_0 = \varphi_{0z} - \varphi_{0y} \text{...} (96)$$

و بالتالي اعتمادا على المعادلات (74) و (95) يمكن كتابة مركبات الحقل الكهرومغناطيسي كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \\ E_z = E_{0z}\cos\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right) \end{cases} \text{..} (97)$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = B_{0y}\cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \\ \mathbf{B}_z = B_{0z}\cos\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right) \end{cases} \text{..} (97)'$$

الطاقة الكهرومغناطيسية للموجة المستوية:

إنطلاقا من المعادلة (72) التي تعرف الطاقة الكهرومغناطيسية و من خواص الموجة المستوية التي تعبر عنها المعادلة (92) يمكن كتابة كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية كمايلي:

$$\omega = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \text{...} (98)$$

أي أن الطاقة الكهرومغناطيسية تنقسم بالتساوي على الحقلين الكهربائي و المغناطيسي كما أن شعاع Poyntyng يأخذ العبارة التالية:

$$\vec{P} = \omega\vec{C} \text{...} (99)$$

من خلال هاته العبارة نلاحظ أن شعاع Poyntying ينقل الطاقة الكهرومغناطيسية في الأمواج المستوية المنتشرة بالسرعة c.

التمثيل المركب للموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون:

بملاحظة أنه يمكن كتابة الدالة الجيبية cos(x) في التمثيل المركب بالشكل:

$$\cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^x\right)$$

فإنه بالإمكان كتابة الحقل الكهرومغناطيسي للمعادلة (97) كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \mathrm{Re}\left(E_{0y} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right)}\right) \\ E_z = \mathrm{Re}\left(E_{0z} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi\right)}\right) \end{cases} \text{......................................} (100)$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \mathrm{Re}\left(B_{0y} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right)}\right) \\ \mathbf{B}_z = \mathrm{Re}\left(B_{0z} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi\right)}\right) \end{cases} \text{...............................} (100)'$$

و للتبسيط نكتب العبارة التالية و نقصد بها الجزء الحقيقي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right)} \\ E_z = E_{0z} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi\right)}) \end{cases} \quad \text{.......... ....} (101)$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = B_{0y} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right)} \\ \mathbf{B}_z = B_{0z} e^{i\left(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi\right)} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (101)'$$

من خلال حلول المعادلة (101) يمكن إستنتاج مايلي بكل سهولة:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{E} = -i\vec{K}\vec{E} \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = iw\vec{E} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (102)$$

و:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{B} = -i\vec{K}\vec{B} \\ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = iw\vec{B} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (102)'$$

من الواضح أنه يمكن تعويض التأثير بـ: $\vec{\nabla}$ و بـ: $\dfrac{\partial}{\partial t}$ على الحقل الكهرومغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون يمكن إستنتاجه من خلال:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \to \left(-i\vec{K}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \to iwt \end{cases} \text{......... ....} (103)$$

و بالتالي إنطلاقا من معادلات ماكسويل (43) و (47) و (54) و (56) إستنتاج خواص الموجة المستوية المنتشرة الوحيدة اللون الموجودة في المعادلتين (92) و (93).

تجدر الإشارة أنه في حالة كتابة الحلول السابقة الذكر على الشكل المكافئ :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} e^{i\left(-wt+\vec{k}\vec{r}\right)} \\ E_z = E_{0z} e^{i\left(*wt+\vec{k}\vec{r}+\varphi\right)} \end{cases}$$

و :

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = B_{0y} e^{i\left(*wt+\vec{k}\vec{r}\right)} \\ \mathbf{B}_z = B_{0z} e^{i\left(-wt+\vec{k}\vec{r}+\varphi\right)} \end{cases}$$

في هذه الحالة يجب تعويض التأثير بـ: $\vec{\nabla}$ و بـ: $\dfrac{\partial}{\partial t}$ على الحقل الكهرومغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون بـ: $i\vec{K}$ و $-i\omega\mathrm{t}$ على التوالي كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \rightarrow \left(i\vec{K}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega\mathrm{t} \end{cases}$$

الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون المستقطبة خطيا:

نقول عن الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون أنها مستقطبة خطيا إذا كان فرق الطور:

$$\varphi_0 = 0, \prod \text{.......... ....}(104)$$

إن أبسط حل للمعادلة (104) هو $\varphi_{0z} = 0, \prod$ و $\varphi_{0y} = 0$ و سنتطرق للحالتين بشيء من التفصيل:

الحالة الاولى:

في الحالة $\varphi_0 = 0$ تصبح المعادلة (97) كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \\ E_z = E_{0z} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \end{cases}$$

و بالتالي تكون النسبة بين المركبتين E_y و E_z وفق المعادلة:

$$\frac{E_z}{E_y} = \frac{E_{0z}}{E_{0y}} \Rightarrow E_z = \frac{E_{0z}}{E_{0y}} E_y$$

أي أن العلاقة بين المركبتين E_y و E_z هي خطية و نقول عن الاسقطاب أنه خطي حيث أنه في هذه الحالة يكون الحقل الكهربائي في نقطة معطاة من الفضاء يهتز بدلالة الزمن في الربع الاول و الربع الثالث حسب الشكل أما بالنسبة لمركبات المجال المغناطيسي فهي تحقق نفس المعادلة أي:

$$B_z = \frac{B_{0z}}{B_{0y}} B_y \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (104)'$$

الحالة الثانية:

في الحالة $\varphi_0 = \Pi$ تصبح المعادلة (97) كمايلي:

$$\begin{cases} \mathrm{E}_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \\ E_z = -E_{0z} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \end{cases}$$

و بالتالي تكون النسبة بين المركبتين E_y و E_z وفق المعادلة:

$$\frac{E_z}{E_y} = -\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \Rightarrow E_z = -\frac{E_{0z}}{E_{0y}} E_y \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots (104)''$$

أي أن العلاقة بين المركبتين E_y و E_z هي خطية و نقول عن الاسقطاب أنه خطي حيث أنه في هذه الحالة يكون المجال المغناطيسي:

$$B_z = -\frac{B_{0z}}{B_{0y}} B_y \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots (104)''$$

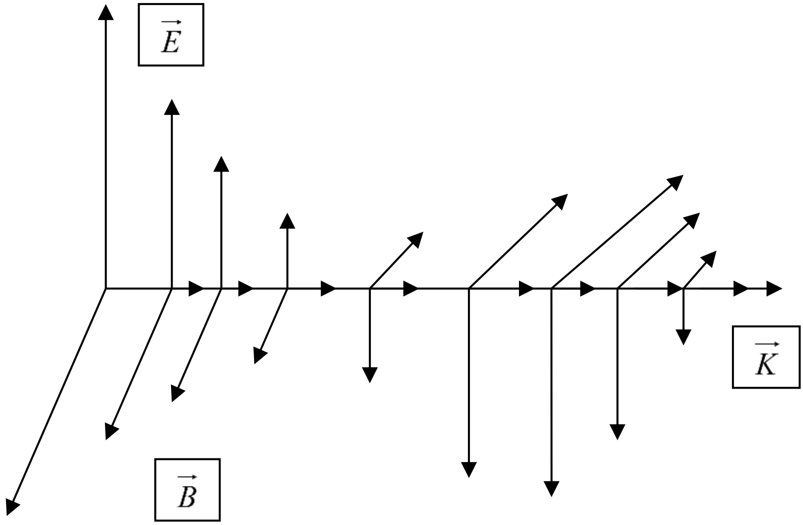
في نقطة معطاة من الفضاء يهتز بدلالة الزمن في الربع الثاني و الربع الرابع حسب الشكل أما بالنسبة لمركبات المجال المغناطيسي فهي تحقق نفس المعادلة و لتبسيط تمثيل هاته الموجة نختار الحقل الكهرومغناطيسي كمايلي:

$$\begin{cases} \mathrm{E}_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots (105) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} \mathrm{B}_x = 0 \\ B_y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (105') \\ \mathbf{B}_z = B_{0z} \cos\left(wt - \vec{k}\vec{r}\right) \end{cases}$$

يسمى اتجاه الحقل الكهربائي باتجاه الاستقطاب و المستوى المعامد للحقل الكهربائي بمستوى الاستقطاب في اللحظة $t = 0$ أو في لحظة زمنية معطاة يكون الحقل الكهرومغناطيسي دالة للمتغير x ويكون مستقيمات متوازية و متعامدة و فيمايلي تمثيل هندسي للموجة الكهرومغناطيسية المستقطبة خطيا في اللحظة $t = 0$.



الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون المستقطبة إهليليجيا:

نقول عن الموجة الكهرومغناطيسية المستوية المنتشرة الوحيدة اللون أنها مستقطبة إهليليجيا إذا كان فرق الطور يحقق المعادلة التالية:

$$\varphi_0 \neq 0,\prod\text{...}(106)$$

إنطلاقا من المعادلة (97) يمكن كتابة مركبات الحقل الكهربائي كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\left[\cos(wt)\right]\sin\left(\vec{k}\vec{r}\right) - \sin(wt)\cos\left(\vec{k}\vec{r}\right) \\ E_z = E_{0z}\left[\cos(wt)\right]\sin\left(\vec{k}\vec{r}+\varphi_0\right) - \cos\left(\vec{k}\vec{r}+\varphi_0\right)\sin(wt) \text{......}(107) \end{cases}$$

انطلاقا من هاته المعادلة يمكن إيجاد $\cos(wt)$ و $\sin(wt)$ و نستعمل العلاقة المثلثية المعروفة:

$$(\cos(wt))^2 + (\sin(wt))^2 = 1$$

لنجد معادلة الاستقطاب التالية:

$$\frac{E_y{}^2}{E_{0y}{}^2\sin(\varphi_0)^2} + \frac{E_z{}^2}{E_{0z}{}^2\sin(\varphi_0)^2} - \frac{2E_{0y}E_{0z}\cos(\varphi_0)}{E_{0y}E_{0z}\sin(\varphi_0)} = 1\text{.....}(108)$$

إن هاته المعادلة تعطينا تغيرات الحقل الكهربائي في نقطة معطاة بدلالة الزمن و هي معادلة قطع إهليلجي شكله يتعلق بفرق الطور φ_0 و السعتين E_{0y} و E_{0z} و بالتالي ستكون نهاية الحقل الكهربائي $\vec{E}$ ترسم قطع إهليلجي محصور في مستطيل أبعاده $2E_{0y}$ و $2E_{0z}$ و فيمايلي بعض الحالات الخاصة:

-عندما تكون $E_{0y} = E_{0z}$ و $\varphi_0 = \frac{\Pi}{2}$ فإن المعادلة (108) تصبح معادلة دائرة و بالتالي نهاية الحقل الكهربائي سترسم مسار دائري في إتجاه معاكس لعقارب الساعة أي في الاتجاه المثلثي يسمى هذا الاستقطاب بالاستقطاب الدائري اليساري و نعبر عن ذلك باللغة الفرنسية بالعبارة: polarisé circulairement a gauche

$$\frac{E_x^{\ 2}}{E_0^{\ 2}} + \frac{E_y^{\ 2}}{E_0^{\ 2}} = 1$$

-عندما تكون $E_{0y} = E_{0z}$ و $\varphi_0 = 3\frac{\Pi}{2}$ فإن المعادلة (108) تصبح معادلة دائرة و نهاية الحقل الكهربائي ترسم مسار دائري في إتجاه عقارب الساعة أي عكس الاتجاه المثلثي يسمى هذا الاستقطاب بالاستقطاب الدائري اليميني polarisé circulairement a droite .

-عندما تكون $E_{0y} \neq E_{0z}$ و $\varphi_0 = \frac{\Pi}{2}$ فإن المعادلة (108) تصبح معادلة دائرة و بالتالي نهاية الحقل الكهربائي سترسم مسار على شكل قطع ناقص في اتجاه معاكس لعقارب الساعة أي في الاتجاه المثلثي :

$$\frac{E_y^{\ 2}}{E_{0y}^{\ 2}} + \frac{E_z^{\ 2}}{E_{0z}^{\ 2}} = 1$$

-عندما تكون $E_{0y} = E_{0z}$ و $\varphi_0 = 3\frac{\Pi}{2}$ فإن المعادلة (108) تصبح معادلة دائرة و نهاية الحقل الكهربائي ترسم مسار على شكل قطع ناقص في إتجاه عقارب الساعة أي عكس الاتجاه المثلثي.

-عندما تكون $\varphi_0 = 0$ فإن المعادلة (97) تعطينا المعادلة الخطية التالية (ما رأيناه في المعادلة $(104)'$)::

$$\mathrm{E_z} = \frac{\mathrm{E_{0z}}}{\mathrm{E_{0y}}} E_y \text{.......... ....} (109)$$

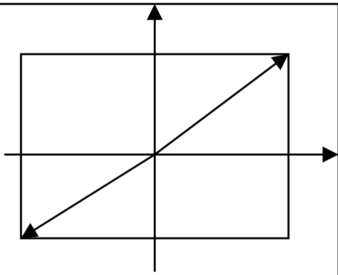
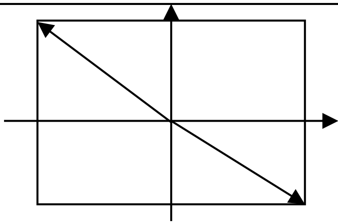
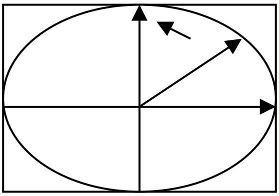
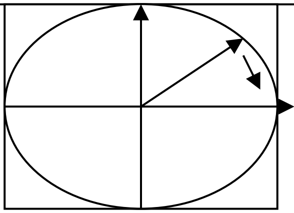
ونهاية الحقل الكهربائي تتحرك وفق خط مستقيم يمر بمبدأ الإحداثيات و ينتمي للربع الأول و الثالث في إطار مستطيل أبعادة الطولية أو العرضية $2E_{0x}$ و $2E_{0y}$.

-عندما تكون $\varphi_0 = \Pi$ فإن المعادلة (97) تعطينا المعادلة الخطية التالية (ما رأيناه في المعادلة $(104)''$):

$$\mathrm{E_z} = -\frac{\mathrm{E_{0z}}}{\mathrm{E_{0y}}} E_y \text{.......... ....} (110)$$

ونهاية الحقل الكهربائي تتحرك وفق خط مستقيم يمر بمبدأ الإحداثيات و ينتمي للربع الثالث و الرابع في إطار مستطيل أبعادة الطولية أو العرضية $2E_{0x}$ و $2E_{0y}$.

-و في الحالات الأخرى ترسم نهاية الحقل الكهربائي مسار قطعي عام و نقول عن الموجة أنها مستقطبة قطعيا.

الاستقطاب الخطي الموافق ل: $\varphi_0 = 0$	
الاستقطاب الخطي الموافق ل: $\varphi_0 = \Pi$	
الاستقطاب الدائري (الاستقطاب اليساري) الموافق ل: $\varphi_0 = \frac{\Pi}{2}$	
الاستقطاب الدائري (الاستقطاب اليميني) الموافق ل: $\varphi_0 = \frac{3\Pi}{2}$	

سرعة الطور و سرعة المجموعة:

تتميز الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة بنوعين من السرعات الأولى تسمى بسرعة الطـور (vitesse de phase) و الثانية بسرعة المجموعة (vitesse de groupe).

سرعة الطور:

و هي السرعة التي تنتقل بها المستويات المعامدة لاتجاه الانتشار لانه بمفاضلة عبارة الطور: $\Phi = wt - kx$

في حالة $\Phi = cte$ التي تمثل من الناحية الهندسية معدلة المستوى المعامد لاتجاه الانتشارنستنتج أن:

$$v_{\varphi} \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\Phi=cte} = \frac{\omega}{k} \qquad (111)$$

و الجدير بالملاحظة بأن هذه السرعة يمكن أن تكون أكبر من سرعة الضوء في الفراغ و بالتالي فهي سرعة غير فيزيائية. في حالة إنتشار الموجة الكهرومغناطيسية في وسط غير محدود تكون علاقة التبديد $\omega = kc$ و بالتالي تكون في هذه الحالة سرعة الطور مساوية لسرعة الضوء في الفراغ.

في الحالة التي يكون فيها وسط الانتشار محدود بناقلين مثلا تكون علاقة التبديد $\omega(k)$ ليست خطية و في هذه الحالة تكون سرعة الطور أكبر من سرعة الضوء في الفراغ.

سرعة المجموعة:

و هي السرعة التي تنتشر بها الطاقة الكهرومغناطيسية و .تعرف كمايلي:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (112)$$

و الجدير بالملاحظة بأن هذه السرعة هي دوما أقل أو تساوي سرعة الضوء في الفراغ و بالتالي فهي سرعة فيزيائيةو تكون العلاقة بين السرعتين كمايلي في كل الحالات:

$$v_{\phi}.v_g = c^2 \qquad (113)$$

إن سرعة الطور تتساوى مع سرعة المجموعة في حالة إنتشار الموجة الكهرومغناطيسية في وسط غير محدود حيث تكون علاقة التبديد $\omega = kc$ علاقة خطية.

الانعكاس و الانتشار الموجه في الوسط المحدود:

لنعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تنتشر في وسط خواصه (ε_0, μ_0) موجود به سطح فصل مستوى Σ . إن معادلات Maxwell في الفراغ تحدد خواص الحقل الكهرومغناطيسي بجوار سطح الفصل حيث أننا سنحلل كل من الحقلين المنتشرين إلى مركبتين أحدهما مماسية لسطح الفصل و أخرى ناظمية عليه في الوسط الاول وفق المعادلة التالية:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)_{T_1} + \vec{E}(\vec{r},t)_{N_1} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)_{T_1} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_1} \end{cases} \qquad (114)$$

أما في الوسط الثاني الذي يحمل نفس الخواص فلدينا أيضا:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)_{T_2} + \vec{E}(\vec{r},t)_{N_2} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)_{T_2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_2} \end{cases} \qquad (115)$$

لايجاد العلاقات الفيزيائية التي تحققها المركبات الناظمية للحقل الكهرومغناطيسي سنطبق نظرية Gauss ومعادلة إنحفاظ التدفق الكهرومغناطيسي حيث أننا سنعتبر إسطوانة جزء منها في الوسط الاول و الجزء الاخر في الوسط الثاني و بإعتبا أن $\vec{n}_{1\to 2}$ يمثل الناظم على سطح الفصل الموجه الوسط الثاني نحو الوسط الاول و بتطبيق نظرية Gauss في شكله التكاملي و نجري النهاية للفيزيائية (الارتفاع يؤول للصفر حيث أن الشحن الداخلية ستكون الشحن السطحية الموجودة دال الاسطوانة فقط):

$$\oiint_s \vec{E}d\vec{s} = \oiint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) d\vec{s}$$

$$\oiint_s \vec{E}d\vec{s} = \oiint \left(\vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{T_1} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_1} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{T_2} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_2}\right) ds\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\oiint_s \vec{E}d\vec{s} = \oiint \left(\vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_1} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_2}\right) ds\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\oiint_s \vec{E}d\vec{s} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\oiint_s \sigma ds}{\varepsilon_0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(116)$$

و بالتالي يمكننا كتابة:

$$\oiint \left(\vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_1} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_2}\right) ds\vec{n}_{1\to 2} = \frac{\oiint_s \sigma ds}{\varepsilon_0}$$

و بالتالي نستنتج العبارة التالية:

$$\oiint \left(\vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_1} \vec{n}_{1\to 2} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_2} \vec{n}_{1\to 2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) ds = 0 \dots\dots(117)$$

و منه ينتج لدينا الخاصية التي تحققها المركبة الناظمية للحقل الكهربائي بجوار سطح الفصل:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_1} \vec{n}_{1\to 2} + \vec{E}\left(\vec{r},t\right)_{N_2} \vec{n}_{1\to 2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_{N_1} - E_{N_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(118)$$

أما الخاصية التي تحققها المركبة الناظمية للمجال المغناطيسي نستنتجها بنفس الطريقة و ذلك باستعمال معادلة إنحفاظ التدفق المغناطيسي:

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{B}d\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_s \left(\vec{B}(\vec{r},t)_{T_1} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_1} + \vec{B}(\vec{r},t)_{T_2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_2}\right)d\vec{s}$$

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{B}d\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_s \left(\vec{B}(\vec{r},t)_{T_1} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_1} + \vec{B}(\vec{r},t)_{T_2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_2}\right)ds\vec{n}_{1\to 2}$$

و بالتالي

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{B}d\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_s \left(\vec{B}(\vec{r},t)_{T_1}\vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_1}\vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{T_2}\vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_2}\vec{n}_{1\to 2}\right)ds$$

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{B}d\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_s \left(+\vec{B}(\vec{r},t)_{N_1}\vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{N_2}\vec{n}_{1\to 2}\right)ds = 0$$

نستنتج:

$$\vec{B}(\vec{r},t)_{N_1}\vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(\vec{r},t)_{C}\vec{n}_{1\to 2} = 0$$
$$\Rightarrow B_{N_1} - B_{N_1} = 0$$
$$\Rightarrow B_{N_1} = B_{N_1} \text{...}(119)$$

أما سلوك المركبة المماسية للحقل الكهربائي فنستنتجها بإستعمال معادلة التحريض الكهرومغناطيس في شكلها التكاملي حيث أننا سنحسب التجوال العنصري للحقل الكهربائي على طول منحنى مغلق لمستطيل جزء منه في الوسط الاول و النصف الاخر منه في الوسط الثاني و نجري النهاية للفيزيائية (العرض يؤول للصفر):

$$E_{T_1} - E_{T_2} = 0 \text{...}(120)$$

في حين أن سلوك المركبة المماسية للمجال المغناطيسي نستنتجه بتطبيق نظرية Ampère المعممة و ذلك بحساب التجوال العنصري للمجال المغناطيسي على طول منحنى مغلق لمستطيل جزء منه في الوسط الاول و النصف الاخر منه في الوسط الثاني و نجري النهاية للفيزيائية (العرض يؤول للصفر):

$$B_{T_1} - B_{T_2} = \mu_0 \vec{n}_{1\to 2} \wedge J_s \text{...}(121)$$

حيث أن J_s يمثل التيار السطحي.

الانعكاس الناظمي على ناقل مثالي:

الحقل الكهرومغناطيسي داخل الناقل المثالي:

يتميز المعدن الفائق الناقلية بناقلية كبيرة جدا $(\gamma \to \infty)$ و بمقاومية صغيرة جـدا $(R \to 0)$ و بتطبيق قانون Ohm : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

يكون الحقل الكهربائي بالضرورة يؤول للصفر أي ينعدم كليا داخل الناقل و بتطبيق نظرية Gauss في شكلها التفاضلي: $\left(div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

تكون الكثافة الشحنية الكلية $(\rho = 0)$ و بالتالي تتساوى الشحنات الموجبة مع الشحـنات السالبة أا إذا طبقنا معادلة التحريض الكهرومغناطيسي

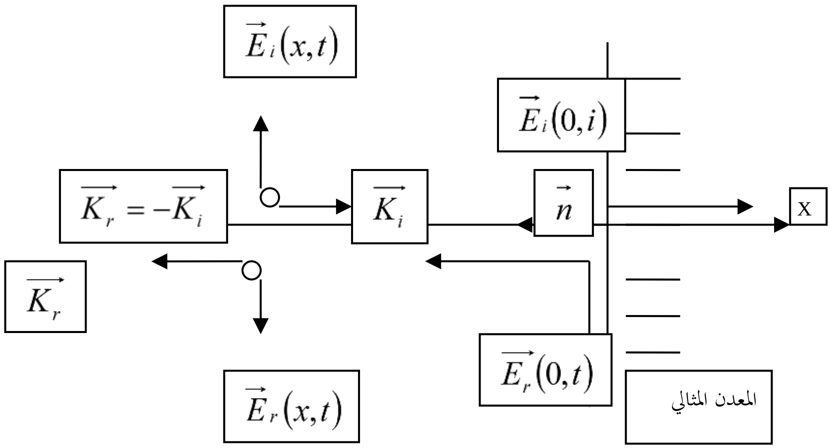
فإن المجال المغناطيسي داخل الناقل المثالي سينعدم أيضا أما عبارة الكمون الشعاعي $\vec{A}$ داخل الناقل المثالي ستكون $\left(\overrightarrow{Rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

أيضا معدومة طبقا للعلاقة بين الكمون الشعاعي و المجال المغناطيسي $\left(\vec{B} = \overrightarrow{Rot\vec{A}}\right)$ و عليه يكون لدينا داخل الناقل المثالي:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = 0 \\ \vec{A} = 0 \end{cases} \quad ....(122)$$

خواص الانعكاس الناظمي لموجة كهرومغناطيسية على ناقل مثالي:

إن الموجة الكهرومغناطيسية التي ترد ناظميا على المعدن هي $\left(\vec{E}_i(x,t), \vec{B}_i(x,t), \overline{K}_i\right)$ بينما الموجة الكهرومغناطيسية التي تنعكس ناظميا عليه فهي $\left(\vec{E}_r(x,t), \vec{B}_r(x,t), \overline{K}_r\right)$ و بتطبيق الشرو ط المحققة



على سطح الفصل و المعادلة (122) يمكن كتابة:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_i}(0,t) + \overrightarrow{E_r}(0,t) = 0 \\ \overrightarrow{B_i}(0,t) + \overrightarrow{B_r}(0,t) = \mu_0 j_s \wedge \vec{n} \end{cases} \quad ....(123)$$

و بالتالي سيكون تواتر الموجة الواردة مساوي لتواتر الموجة المنعكسة:

$$\begin{cases} \overrightarrow{K_r} = -\overrightarrow{K_i} \\ \left|\overrightarrow{K_r}\right| = \left|\overrightarrow{K_i}\right| = \dfrac{\omega}{C} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (124)$$

و كل من الموجتتين الواردة و المنعكسة تحققان العلاقة الخاصة بالامواج المستوية:

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \dfrac{\vec{K}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} \\ \vec{B}_r = \dfrac{\vec{K}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (125)$$

إن معادلات الموجتين الواردة و المنعكسة هي من الشكل:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_i}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(wt - kx) \\ \overrightarrow{B_i}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(wt - kx) \\ B_0 = \dfrac{E_0}{C} \\ k = \dfrac{\omega}{C} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (126)$$

و:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_r}(x,t) = -\vec{E}_0 \cos(wt + kx) \\ \overrightarrow{B_i}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(wt + kx) \\ B_0 = \dfrac{E_0}{C} \\ k = \dfrac{\omega}{C} \end{cases} \quad \text{.......... ....} (127)$$

و بالتالي نتحصل على الموجة المتكونة من تداخل الموجتين الواردة و المنعكسة التي يكون حقلها الكهربائي وفق المعادلة:

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \overrightarrow{E_i}(x,t) + \overrightarrow{E_r}(x,t) \\ \vec{E}(x,t) = 2\vec{E}_0 \sin(kx)\sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{.......... ....} (128)$$

أما المجال المغناطيسي للموجة الناتجة:

$$\begin{cases}\vec{B}(x,t)=\vec{B_i}(x,t)+\vec{B_r}(x,t)\\ \vec{E}(x,t)=2\vec{B}_0\sin(kx)\cos(\omega t)\end{cases}\quad \text{..........................}(129)$$

إن الموجة الناتجة هي موجة مستقرة من الشكل:

$$S(x,t)=f(x)g(t)\text{..}(130)$$

أما الان فنحسب شعاع Poynting لهذه الموجة:

$$\begin{cases}\overline{P}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\\ \overline{P}=\dfrac{E_0^{\ 2}}{\mu_0 c}\sin(2kx)\sin(2\omega t)\vec{e}_x\text{..........................}(131)\end{cases}$$

أما القيمة المتوسطة لهذه الشعاع فهي معدومة $\left\langle \vec{P}\right\rangle = 0$ و بالتالي هذه الموجة لا تكون منتشرة. أما بالنسبة لكثافة الطاقة الكهرومغناطيسية (الطاقة الكهرومغناطيسية في وحدة الحجم) للموجة المستقرة هي:

$$\overline{\omega}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^{2}+\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^{2}$$

$$\overline{\omega}=\varepsilon_0\vec{E}^{2}\text{ ....}(132)$$

إن عنصر السطح ds للمعدن الفائق الناقلية يخضع لتأثي القوة العنصرية $d\vec{f}(t)$ التي تحدد عبارتها الفيزيائية كمايلي:

$$d\vec{f}(t)=\frac{1}{2}\vec{j}_s\wedge\vec{B}(0,t)ds\text{.................................}(133)$$

تكون هذه القوة موجهة وفق إتجاه الانتشار للموجة الواردة و يتأثر المعدن بالضغط الناتج عن الاشعاع الكهرومغناطيسي p المحدد بالعبارة التالية:

$$p=\frac{\left\langle d\vec{f}(t)\right\rangle}{d\vec{s}}=\varepsilon_0\vec{E}^{2}\text{ ....}(134)$$

و الجدير بالذكر أن الضغط الناتج عن الاشعاع الكهرومغناطيسي p في حالة ورود الموجة الكهرومغاطيسية بزاوية α (و هي الزاوية المحصورة بين الناظم على سطح المعدن و الشعاع الموجي الكلاسيكي للموجة الواردة) يكون وفق العبارة التالية:

$$p=\frac{\left\langle d\vec{f}(t)\right\rangle}{d\vec{s}}=\varepsilon_0\vec{E}^{2}\cos^2(\alpha)\text{..............................}(135)$$

الانتشار الموجه و علاقة التبديد:

تعرف قرينة الانكسار n على أنها النسبة بين سرعة الضوء في الفراغ و سرعة الطور التي رأيناها في العبارة (111) حيث تأخذ العبارة:

$$n=\frac{c}{v_{\varphi}}=\frac{k}{\omega}c.........\,.........\,.........\,..........\,..(136)$$

نميز بين حالتين أساسيتين:

الحالة الاولى:

إذا كانت النسبة $\frac{k}{\omega}$ مستقلة عن النبض ω تكون قرينة الانكسار في هذه الحالة ثابتة يكون الوسط غير مشتت (milieu n'est pas dispersif) كحالة الوسط اللامحدود.

الحالة الثانية:

إذا كانت النسبة $\frac{k}{\omega}$ متغيرة بدلالة النبض ω تكون قرينة الانكسار في هذه الحالة متغيرة بدلالة النبض يكون الوسط مشتت (milieu est dispersif) كحالة الوسط االمحدود و العلاقة $k(\omega)$ تسمح بتعيين سرعتي الطور و المجموعة.

داخل حجرة فارغة محددة بسطوح معدنية فائقة الناقلية تنتشر ما يسمى بالموجة الموجهة التي تحقق الشروط التالية:

1-معادلات Maxwell في الفراغ.

2-الشروط الحدودية بجوار سطح الفصل لسطح المعدن الفائق الناقلية.

و لا تسمح هذه الاوساط على إنتشار الامواج المميزة بتواترت مستمرة حيث تسمح فقط للامواج التي تكون تواتراتها مكممة أي مرتبطة بأعداد طبيعية و تعرف ما يسمى بنمط الانتشار أي أنها مرشحة تواترات مكممة و تصبح العلاقة بين قيمة الشعاع الموجي k و التواتر ω علاقة غير خطية.

$$\beta=ik$$

المراجـــع
Bibliographies

1-محاضرات الأستاذ معيرش عبد المجيد لمقياس: SEP220 السنة الثانية DES فيزياء من سنة 1993-2001.

2- محاضرات الأستاذ معيرش عبد المجيد لمقياس النسبية و الأمواج الكهرومغناطيسية السنة الثانية DES فيزياء 2001-2007.

3-ELECTRICITE 2 ((J. BOUTIGNY)) * VUIBERT* ISBN2-71177-4244 X * 1990*.

4-RELATIVITE RESTREINTE ET STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE ((C. GROSSTETE)) ellipses * ISBN 2-7298-8554-4 1985

5- Exercices Electricité 2 ((J. BOUTIGNY)) * VUIBERT* ISBN2-71177-4245 X * 1992*.

6- RELATIVITE Problèmes résolus ((HUBERT LUMBROSO)) * MCGRAW-HILL)) ISBN 2-7042-1016-0 1979.

7- Equation de Maxwell Ondes électromagnétique ((Michel Huilin-Nicole Hulin-Denise Perrin)) *DUNOD* ISBN 2-10-001657-1 1993.

8-PHYSIQE DES ONDES ((Catheine BOTET)) ellipses * ISBN 2-7298-4678-61996.

9-PROBLEMS AND SOLUTIONS ON ELECTROMAGNETISM, Zaho Shu-ping, You-han, Zhu Jun-Jie Edited by: Lim Yung-Kuo.

10–النسبية الخاصة مع تطبيقات نموذجية مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. **ردمك: 3-74- 948-9961-978 الطبعة الأولى: 2009**

11- الكهرباء و المغناطيسية في النظامين الساكن و الديناميكي مع أمثلة نموذجية مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. ديوان المطبوعات الجامعية **ردمك: 987.9961.0.1760.9 الطبعة الأولى: 2014**

12- مدخل للنظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل في الفراغ) مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. ديوان المطبوعات الجامعية **ردمك: 987.9961.0.1486.8 الطبعة الأولى: 2011**