الأستاذ عبد المجيد معيرش

الامواج الكهرومغناطيسية

العنوان: الكهرومغناطيسية

Title: Electromagnetism

المستوى:السنة الثانية ليسانس فيزياء

Level: Second-year Licence of Physics

السداسي:الثاني

The second part of the second year

الفصل الثــاني

تطبيقات فيـزيائية

Physics Applications

التمرين الأول:

لنعتبر وسط ناقل خواصه الكهرومغناطيسية (ε_0, μ_0) على شكل متوازي مستطيلات خال من الشحن و التيارات $(\vec{J} = \rho = 0)$ تنتشر في وسطه الداخلي موجة كهرومغناطيسية جيبية تواترها ω بحيث تكون مركبات الحقل الكهربائي كمايلي:

$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = E_0 \cos\left(\Pi y / b\right) \exp i(kx - \omega t)$$

حيث b و E_0 ثوابت موجبة.

1-إنطلاقا من معادلة الانتشار أوجد علاقة التبديد $\omega(k)$ ثم إستنتج سرعة الصفحة v_φ و بين أن $v_\varphi v_g = C^2$ حيث v_g سرعة المجموعة.

2-أوجد عبارة الحقل المغناطيسي

3-أحسب شعاع Poyntyng ماذا تستنتج.

الحل النموذجي

1-إن معادلة إنتشار الحقل الكهربائي في وسط خال من الشحن و التيارات تكتب كمايلي:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

حيث Δ تمثل عبارة اللابلاسيان التي نعبر عنها في الإحداثيات الديكارتية كمايلي:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

و بما أن المركبة الغير معدومة للحقل الكهربائي هي E_z فمعادلة الانتشار تأخذ الصيغة التالية:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

إنطلاقا من عبارة E_z يمكن أن نجد بكل سهولة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k^2 E_z \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{\Pi}{b}\right)^2 E_z \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 E_z \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة الانتشار نجد:

$$\left(-\left(\frac{\Pi}{b}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{C^2}\right) E_z = 0$$

و بالتالي نجد علاقة التبديد:

$$\omega^2 = k^2 C^2 + \left(\frac{\Pi}{b} C\right)^2$$

و عليه نستنتج سرعة الصفحة:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = C\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi}{bk}\right)^2}$$

من الواضح أن سرعة الصفحة أكبر من سرعة الضوء في الفراغ و بالتالي فهي سرعة غير فيزيائية و هي تمثل سرعة إنتقال المستويات المعامدة لاتجاه الانتشار (سرعة إنتقال سطح الموجة).

من علاقة التبديد نستطيع كتابة:

$$\omega d\omega = C^2 k dk$$

و بالتالي نجد:

$$\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = C^2$$

أي أن سرعة المجموعة تأخذ العبارة التالية:

$$\mathrm{v_g} = \frac{C}{\sqrt{1+\left(\frac{\Pi}{bk}\right)^2}}$$

نلاحظ أن سرعة المجموعة أقل من سرعة الضوء في الفراغ و هو ما يتفق مع مبادئ نظرية النسبية الخاصة و هي تمثل من الناحية الفيزيائية سرعة إنتقال الطاقة الكهرومغناطسية.

2-نحسب الحقل المغناطيسي إنطلاقا من معادلة التحريض الكهرومغناطيسي

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{E} = -\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

و بما أن:

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = -i\omega\vec{B}$$

لأنها تتغير بدلالة الزمن بنفس طريقة الحقل الكهربائي و بالتالي نجد:

$$\begin{cases} \mathrm{B_x} = -i\dfrac{E_0\,\Pi}{b\omega}\sin\left(\dfrac{\Pi\, y}{b}\right)\exp i\left(kx-\omega t\right) \\ B_y = kE_0\cos\left(\dfrac{\Pi\, y}{b}\right)\exp i\left(kx-\omega t\right) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

أما الشكل الحقيقي لمركبات الحقل المغناطيسي فهي:

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{E_0 \Pi}{b\omega}\sin\left(\dfrac{\Pi y}{b}\right)\sin(kx-\omega t) \\ B_y = kE_0 \cos\left(\dfrac{\Pi y}{b}\right)\cos(kx-\omega t) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

3-لحساب شعاع Poyntying نستعمل إحدى العبارات (الشكل الحقيقيين للحقلين الكهربائي و المغناطيسي أو الحقل الكهربائي حقيقي و الحقل المغناطيسي مركب أو الحقل الكهربائي مركب و الحقل المغناطيسي حقيقي):

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}\Lambda\vec{B}}{\mu_0} \text{ أ } \quad \vec{P} = \frac{\vec{E}^*\Lambda\vec{B}}{\mu_0} \quad / \quad \vec{P} = \frac{\vec{E}\Lambda\vec{B}^*}{\mu_0}$$

و بالتالي نجد:

$$\vec{P} = -\frac{B_y E_z}{\mu_0}\vec{e}_x - \frac{B_x E_z}{\mu_0}\vec{e}_y$$

و منه نستنتج أن الموجة المنتشرة ليست مستوية لان شعاع Poyntying ليس موازي لاتجاه الانتشار (Ox).

التمرين الثاني:

ليكن لدينا معلم غاليلي (R') يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{v} = \beta\vec{C}$ وفق المحور (Ox) بالنسبة للجملة الغاليلية (R) بحيث يكون المعلمين منطبقين في اللحظة $(t = t' = 0)$ تعطى مركبات الحقل الكهرومغناطيسي في الجملة (R) :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \sin(\alpha) \\ E_z = E_0 \cos(\alpha) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = n\dfrac{E_0}{C} \end{cases}$$

حيث $0 \prec \beta \prec \dfrac{\Pi}{2}$ و C سرعة الضوء في الفراغ.

1-أثبت أنه توجد قيمة لـ: β بدلالة n و α بحيث يكون الحقلين الكهربائي و المغناطيسي في نفس الاتجاه في المعلم (R')

2-لنعتبر الحالة $\frac{E}{B}=C$ كيف يصبح شرط التوازي ثم أدرس الحالة $\alpha=\frac{\Pi}{2}$

الحل النموذجي

1-نطبق التحويلات النسبية للحقل الكهرومغناطيسي التي رأيناها في الفصل الثاني لنجد بسهولة:

$$\begin{cases} E'_x=0 \\ E'_y=\gamma(\sin(\alpha)-\beta n)E_{0...} \\ E'_z=0 \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B'_x=0 \\ B'_y=\frac{\gamma}{C}\beta\cos(\alpha)E_{0...} \\ B'_z=\frac{\gamma}{C}(n-\beta\sin(\alpha))E_0 \end{cases}$$

يكون الحقلان $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ لهما نفس الاتجاه في الجملة (R') إذا تحقق الشرط:

$$\vec{E}'\Lambda\vec{B}'=0$$

و بالتالي ينتج:

$$E'_y B'_w=E'_w B'_y$$

بالتعويض نجد مايلي:

$$n\sin(\alpha)\beta^2-(n^2+1)\beta+n\sin(\alpha)=0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ: β . إن المميز يأخذ العبارة التالية من عبارته يكون دوما موجب:

$$\Delta=(n^2+1)^2-4n^2\sin(\alpha)^2$$

إن الحل الفيزيائي المقبول هو الذي قيمة موجبة لـ: β

$$\beta=\frac{n^2+1-\sqrt{(n^2+1)^2-4n^2\sin(\alpha)}}{2n\sin(\alpha)}$$

2-عندما تكون $\frac{E}{B}=C$ ينتج $n=1$ و بعد تبسيط العبارة السابقة نجد:

$$\beta = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

نلاحظ أنه من أجل $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ تصبح الكمية السلمية $\vec{\mathrm{E}}\vec{\mathrm{B}}$ غير صامدة إلا إذا إنعدمت إحدى مركبتي الحقل الكهرومغناطيسي في الجملة (R').

التمرين الثالث:

لنعتبر موجة كهر ومغناطيسية مستوية تنتشر في خواصه الكهرومغناطيسية (ε_0, μ_0) بحيث يكون الحقل الكهربائي كمايلي:

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \vec{E}_0 \exp i\left[\vec{K}\vec{r} - \omega t\right]$$

بحيث يكون $\upsilon_\$ = 0$ و $\vec{J}_\mathrm{m} = \gamma\vec{E}$ بين هاته الموجة متخامدة

الحل النموذجي

لننطلق من معادلة الانتشار للحقل الكهربائي:

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{\mathrm{C}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho/\varepsilon_0\right)$$

التي تصبح في حالتنا كمايلي:

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{\mathrm{C}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -i\mu_0\omega\vec{E}$$

و بما أن الموجة مستوية فتصبح هاته المعادلة كمايلي:

$$-\mathrm{k}^2\vec{\mathrm{E}} - \frac{\omega^2}{\mathrm{C}^2}\vec{\mathrm{E}} = -i\mu_0\omega\vec{E}$$

أي أن k^2 تكتب كمايلي:

$$\mathrm{k}^2 = -\frac{\omega^2}{\mathrm{C}^2} + i\mu_0\omega$$

بمعنى أنه يمكننا كتابة الشعاع الموجي $\vec{k}$ كمايلي:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + i\vec{K}_2$$

نعوض عبارة الشعاع الموجي $\vec{k}$ في عبارة الحقل الكهربائي لنجد:

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \vec{E}_0 \exp\left(-\vec{K}_2\vec{r}\right)\exp i\left[\vec{K}_1\vec{r} - \omega t\right]$$

نلاحظ أن سعة الحقل الكهربائي هي $\vec{E}_0\exp\left(-\vec{K}_2\vec{r}\right)$ و هي تحقق النهاية التالية:

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\vec{E}_0\exp\left(-\vec{K}_2\vec{r}\right) = 0$$

و منه تكون الموجة متخامدة.

التمرين الرابع:

مكثفة مستوية في حالة توازن بالنسبة للجملة (R) المخبرية تتكون من صفيحتين معدنيتين متوازيتان ومستطيلتان حرفيهما a و b بحيث الحرف a موازي للمحور (Ox) نشحن سطحيهما بكمية كهرباء كثافتها σ و $(-\sigma)$ نعتبر السمك مهمل أمام بقية الأبعاد. الجملة (R') في حالة حركة مستقيمة منتظمة بالسرعة $\mathrm{\vec{u}} = \vec{\beta}\mathrm{C}$ موازية للمحور (Ox).

1 -عبر عن σ' في المعلم (R') بدلالة σ و β

2-استنتج الحقل الكهربائي $\vec{E}'$ و المغناطيسي $\vec{B}'$ المقاس في المعلم (R') بدلالة σ و β

3 -تحقق من صمود المقادير السلمية $\vec{E}\vec{B}$ و $\vec{E}^2 - C^2\vec{B}^2$.

مساعدة:

الحرف a بالنسبة للجملة (R') يصبح $\mathrm{a}\sqrt{1-\beta^2}$ بينما الحرف b لا يتغير.

الحل النموذجي

1-بتطبيق مبدأ إنحفاظ الشحنة الكهربائية نستطيع كتابة:

$$\sigma \mathrm{ab} = \sigma' \mathrm{a'b'}$$

و بما أن :

$$\mathrm{a'} = \mathrm{a}\sqrt{1-\beta^2}, \ldots\ldots b' = b$$

ندك بسهولة:

$$\varsigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

2-إن مركبا ت الحقل الكهربائي في المعلم (R') تكون كمايلي:

$$\begin{cases} E'_x = 0 \\ E'_y = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} \\ E'_z = 0 \end{cases}$$

و بالتالي نجد المركبة الغير معدومة للحقل الكهربائي:

$$E' = E'_y = \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}}$$

الحقل المغناطيسي في المعلم (R') ناتج عن حركة المكثفة بالسرعة $\mathrm{\vec{u}}$ الذي يأخذ العبارة التالية:

$$\vec{B}' = \mu_0 \sigma' \vec{u}$$

و بالتالي نجد:

$$B'_x = B' = \frac{\sigma\beta}{\varepsilon_0 C\sqrt{1-\beta^2}}$$

لان $\varepsilon_0\mu_0 C^2 = 1$

2- يمكن أن نتحقق بسهولة من المقادير السلمية $\vec{E}\vec{B}$ و $\vec{E}^2 - C^2\vec{B}^2$ عن طريق الحساب المباشر.

التمرين الخامس:

لنعتبر موجة كهر ومغناطيسية منتشرة في وسط مشكل من غاز ذراته مؤينة نعتبرها عمليا ساكنة بحيث تتحرك الإلكترونات الحرة في هذا الوسط الذي يسمى بالبلازمـا (شحنة الإلكترون وكتلته على التوالي هما: e و m_e أما عدد الإلكترونات في وحدة الحجم فهي N) كما أن كثافة الشحنة الكهربائية الكلية الحجمية معدومة وعمليا تخضع الإلكترونات للقوة الكهربائية فقط عبارة الحقل الكهربائي كمايلي:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp i[\omega t - kz]\vec{e}_x$$

1-أوجد شعاع كثافة التيار للإلكترونات

2-بين أن:

$$k^2 = \frac{1}{C^2}\left(\omega^2 - \omega_p{}^2\right)$$

حيث ω_p يسمى بتواتر القطع و يأخذ العبارة التالية:

$$\omega_p{}^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$$

3-إذا كان $\omega \rangle \omega_p$ أحسب شعاع Poyntying و كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية و قيمهما المتوسطة الزمنية في نقطة معطاة ثم إستنتج ماذا تعني نسبة القيمة المتوسطة لشعاع Poyntying إلى القيمة المتوسطة لكثافة الطاقة الكهرومغناطيسية

4- إذا كان $\omega \langle \omega_p$ أعط بنية الموجة كيف تصبح القيمة المتوسطة لشعاع Poyntying في هذه الحالة.

الحل النموذجي

إن المعادلة التفاضلية التي تصف حركة الإلكترون و ذلك بإهمال تأثير القوة المغناطيسية تعطى كمايلي:

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^0} = -|e|\vec{E}$$

بالإمكان كتابة السرعة اللحظية للإلكترون في التمثيل المركب كمايلي:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = i\omega\vec{v}$$

و بالتالي يمكن أن نكتب:

$$\vec{v}=i|e|\frac{\vec{E}}{m_e\omega}$$

و بالتالي تكون حركة الإلكترون جيبية في نفس إتجاه حركة الحقل الكهربائي. أما شعاع كثافة التيار للالكترونات فيأخذ الصيغة التالية:

$$\vec{j}=-N|e|\vec{v}$$

و بإستعمال المعادلة السابقة نجد:

$$\vec{j}=-\frac{iNe2}{m_e\omega}\vec{E}$$

2-لنستعمل معادلات ماكسويل التالي:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\Lambda\left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\right)=\vec{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

بالإضافة لعبارة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي في الشكل المركب لنجد:

$$\begin{cases}-ikE_0=-i\omega B_0\\ k\dfrac{B_0}{\mu_0}=E_0\left(\varepsilon_0\omega-\dfrac{Ne^2}{m_e\omega}\right)\end{cases}$$

و بالتالي نجد:

$$k^2=\frac{1}{C^2}\left(\omega^2-\omega_p{}^2\right)$$

أي أن علاقة التبديد تكون كمايلي:

$$\omega^2=k^2C^2+\omega_p{}^2$$

3-عندما يكون التواتر ω أكبر من تواتر القطع ω_p يكون العدد الموجي حقيقي السعة B تكون كمايلي:

$$B_0=\frac{k}{\omega}E_0$$

أما عبارة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي في الشكل الحقيقي يكونان كمايلي:

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-Kz\right)\\ \vec{B}=\vec{B}_0\cos\left(\omega t-Kz\right)\end{cases}.$$

و بالتالي تكون عبارة شعاع Poyntying كمايلي بعد حساب بسيط:

$$\vec{P}=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\cos(\omega t-kz)\vec{e}_z$$

أما كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية فتعطى كمايلي:

$$\omega=\varepsilon_0\frac{E}{2}+\frac{B}{2\mu_0}+\frac{1}{2}Nm_ev^2$$

و بالتالي بعد التبسيط:

$$\omega=\frac{\varepsilon_0E_0^{\ 2}}{2}\cos^2\left(\omega t-kz\right)+\frac{B_0^{\ 2}}{2\mu_0}\cos^2\left(\omega t-kz\right)+\frac{Ne_2E_0^{\ 2}}{2m_e\omega^2}\sin^2\left(\omega t-kz\right)$$

و بتعويض عبارة B_0 تصبح كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية:

$$\omega=\varepsilon_0\frac{E_0^{\ 2}}{2}\frac{\omega_p^{\ 2}}{\omega^2}+\varepsilon_0E_0^{\ 2}\left(1-\frac{\omega_p^{\ 2}}{\omega^2}\right)\cos^2\left(\omega t-kz\right)$$

بالحساب المباشر يمكن التحقق من معادلة إنحفاظ الطاقة الكهرومغناطيسية.

إن القيم المتوسطة الزمنية لكثافة الطاقة الكهرومغناطيسية و شعاع Poyntying تأخذ القيم التالية:

$$\left(\vec{P}\right)=\frac{kE_0^{\ 2}}{2\mu_0\omega}$$

$$\left(\omega\right)=\varepsilon_0\frac{E_0^{\ 2}}{2}$$

و بالتالي نجد النسبة:

$$\frac{\left(\vec{P}\right)}{\left(\omega\right)}=C^2\frac{k}{\omega}$$

و بما أن سرعة الصفحة:

$$v_{\varphi}=\frac{\omega}{k}$$

و سرعة المجموعة تعطى كمايلي:

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}$$

كما أن:

$$v_{\varphi}v_g=C^2$$

فإنه ينتج لدينا مايلي:

$$v_g=\frac{\left(\vec{P}\right)}{\left(\omega\right)}$$

و هي نتيجة منطقية و متوقعة فيزيائيا.

4- عندما يكون التواتر ω أقل من تواتر القطع ω_p يكون العدد الموجي تخيلي أي أنه يمكننا كتابة العدد الموجي كمايلي:

$$k=ik'$$

حيث k حقيقي و بالتالي يمكننا كتابة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي كمايلي:

$$\begin{cases}\vec{E}=E_0\exp\left(-k'z\right)\cos\left(\omega t\right)\vec{e}_x\\ \vec{B}=\frac{k'}{\omega}E_0\exp\left(-k'z\right)\cos\left(\omega t\right)\vec{e}_y\end{cases}$$

و بالتالي فالموجة لا تنتشر و إنما تتخامد و تكون في هاته الحالة القيمة المتوسطة لشعاع Poyntying معدومة.

التمرين السادس:

لنعتبر موجة مستوية تواترها ω تنتشر وفق المحور (OX) و مستقطبة دائريا في الاتجاه المباشر

1-أكتب عبارة الحقل الكهربائي

2-ماهي عبارة الحقل المغناطيسي

3-أحسب شعاع Poyntying و بين أنه مستقل عن الزمن

الحل النموذجي

بما أن الانتشار يكون وفق المحور (OX) فمركبة الحقل الكهربائي وفق هذا المحور تكون معدومة و كون الموجة مستقطبة دائريا في الاتجاه المباشر فيكون فرق الطور بين المركبتين E_y و E_z هو $\frac{\Pi}{2}$ و بالتالي فيمكننا كتابة العبارة التحليلية للحقل الكهربائي في التمثيل المركب كمايلي:

$$\vec{E}=E_0\left(\vec{e}_y-i\vec{e}_z\right)\exp\left(i\omega t\right)\exp\left(-i\vec{k}\vec{r}\right)$$

و بالتالي تكون عبارة الحقل الكهربائي في التمثيل الحقيقي كمايلي:

$$\vec{E}=E_0\left[\left(\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right)\vec{e}_y+\sin\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\vec{e}_z\right]$$

2-و بما أن الموجة مستوية فعبارة الحقل المغناطيسي تستنتج من العلاقة التالية:

$$\vec{B}=\frac{\overleftarrow{k}\Lambda\vec{E}}{\omega}$$

و بعد حساب بسيط نستنتج العبارة التالية للحقل المغناطيسي:

$$\vec{B}=i\frac{k}{\omega}\left(\vec{e}_y-i\vec{e}_z\right)\exp\left(i\omega t\right)\exp\left(-i\vec{k}\vec{r}\right)$$

من الواضح أن الحقل المغناطيسي مستقطب دائريا في الاتجاه المباشر و أن الجداء السلمي للحقلين الكهربائي و المغناطيسي معدوم و ذلك منطقي لأنه من خواص الموجة المستوية. بينما في التمثيل الحقيقي تكون عبارة الحقل المغناطيسي كمايلي:

$$\vec{B}=\frac{k}{\omega}\left[\left(-\sin\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\right)\vec{e}_y+\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)\vec{e}_z\right]$$

3-أما عبارة شعاع Poyntying فتستنتج من العبارة التالية حيث يكون الحقلين في التمثيل الحقيقي:

$$\vec{P}=\frac{\vec{E}\Lambda\vec{B}}{\mu_0}$$

و بعد حساب بسيط نجد:

$$\overline{P}=\frac{k}{\omega\mu_0}E_0{}^2\vec{e}_x$$

و هي نتيجة منطقية لان شعاع Poyntying في حالة الموجة المستوية يكون وفق إتجاه الانتشار و مسؤول عن نقل الطاقة الكهرومغناطيسية. من الواضح أنه مستقل عن الزمن.

<u>التمرين السابع</u>

لتكن لدينا معادلة الانتشار التالية:

$$\Delta S-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=0$$

حيث S مقدار سلمي. نبحث عن حل المعادلة التفاضلية بحيث يكون $S(r,t)$ و هذا ما يوافق الموجة الكروية و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. بوضع:

$$S(r,t)=\frac{\chi(r,t)}{r}$$

أوجد الحلول الفيزيائية.

الحل النموذجي

إن عبارة ΔS في جملة الإحداثيات الكروية تعطي كمايلي:

$$\Delta S=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)$$

و بما أن S مستقلة عن θ و φ فإن العبارة السابقة بعد التبسيط تصبح كمايلي:

$$\Delta S(r,t)=\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r}$$

يمكن أن نبين بسهولة أن:

$$\frac{\partial S}{\partial r}=-\frac{\chi}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}$$

و كذلك:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}=\frac{2\chi}{r^3}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}$$

و بالتعويض في معادلة الانتشار نجد:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$$

و هي معادلة مماثلة لمعادلة انتشار الموجة المستوية بشرط تعويض X بـ: r و بالتالي نستطيع كتابة الحل كمايلي:

$$\chi(r,t)=f(r-Ct)+h(r+Ct)$$

و بالتالي يمكننا كتابة مايلي:

$$S(r,t)=\frac{1}{r}\left[f(r-Ct)+h(r+Ct)\right]$$

و هي تمثل تركيب حلين حيث يمثل الحل الأول موجة كروية متباعدة إنطلاقا من مبدأ الإحداثيات بينما يمثل الحل الثاني موجة كروية متقاربة نحو مبدأ الإحداثيات بينما السعة متناسبة مع $\frac{1}{r}$.

التمرين الثامن

لتكن (R) و (R') جملتان غاليليتان بحيث تتحرك (R') بالنسبة لـ: (R) بسرعة ثابتة $\vec{V}$ وفق المحور (Ox). في اللحظة $(t = t' = 0)$ يكون مبدأي الجملتين متطابقين. إذا كانت العلاقة بين إحداثيات النقطة $M(x, y, z, ct)$ في (R) و نفس النقطة $M(x', y', z', ct')$ الإحداثيات في (R') - c سرعة الضوء في الفراغ- تعطى بالعبارة:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

حيث $\beta = \frac{V}{c}$ و $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. بتطبيق مبدأ صمود المعادلتين

$$\begin{cases} \overrightarrow{Rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{Rot\vec{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

أوجد علاقات تحويل الحقل الكهرومغناطيسي.

الحل النموذجي:

انطلاقا من علاقات التحويل بين الإحداثيات يمكننا كتابة العلاقات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{cases}$$

و بالتالي نجد بكل سهولة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma \dfrac{\partial}{\partial x'} - \gamma\beta \dfrac{\partial t'}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = -\gamma\beta c \dfrac{\partial}{\partial x'} + \gamma \dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases}$$

أما الآن فنكتب مسقط المعادلة $\overrightarrow{Rot\vec{E}} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ على المحاور الكارتزية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} ....(1) \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} ....(2) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} ....(3) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E'_z}{\partial y'} - \dfrac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\dfrac{\partial B'_x}{\partial t'} ....(1') \\ \dfrac{\partial E'_x}{\partial z'} - \dfrac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\dfrac{\partial B'_y}{\partial t'} ....(2') \\ \dfrac{\partial E'_y}{\partial x'} - \dfrac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\dfrac{\partial B'_z}{\partial t'} ....(3') \end{cases}$$

بتعويض العلاقات التفاضلية السابقة في المعادلتين (2) و (3) و بعد التبسيط نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z'} - \dfrac{\partial\left[\gamma\left(E_z + VB_y\right)\right]}{\partial x'} = -\gamma\left[\dfrac{\partial}{\partial t'}\left(B_y + \dfrac{V}{c^2}E_z\right)\right] \text{.......... ....}(4') \\ \dfrac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(E_y - VB_z\right)\right] - \dfrac{\partial E_x}{\partial y'} = \gamma\left[\dfrac{\partial}{\partial t'}\left(B_z - \dfrac{V}{c^2}E_y\right)\right] \text{.......... ....}(5') \end{cases}$$

بمطابقة المعادلتين $(4')$ و $(5')$ بالمعادلتين $(2')$ و $(3')$ على التوالي نجد بسهولة:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right)\left(B_y + \dfrac{V}{c^2}E_z\right) \\ E'_z = \gamma\left(E_z - VB_y\right) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B'_x = ... \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \dfrac{V}{c^2}E_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{V}{c^2}E_y\right) \end{cases}$$

من الواضح أن تحويل مركبة الحقل المغناطيسي وفق المحور (Ox) لم تستنتج و لاستنتاجها سنتبع نفس الأسلوب حيث نستعمل العلاقة $\overrightarrow{Rot\vec{B}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ لنجد علاقة التحويل للمركبة B'_x التي تكون كمايلي:

$$B'_x = B_x$$

التمرين التاسع:

لنعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تواترها ω تنشر وفق المحور (ox) مستقطبة دائريا في الاتجاه المباشر.

1-أكتب عبارة الحقل الكهربائي

2-ماهي عبارة الحقل المغناطيسي

3-ماهي عبارة شعاع Poyntying بين أنه مستقل عن الزمن

الحل النموذجي

1-بما أن الموجة الكهرومغناطيسية مستوية منتشرة وفق المحور (ox) هذا يعني أن مركبة الحقل الكهربائي وفق هذا المحور معدومة. و لان الموجة مستقطبة دائريا ستكون سعة المركبتين وفق المحورين (oy) و (oz) مساويتين و الفرق في الطور بين المركبتين هو $\frac{\Pi}{2}$ و بالتالي تكون المركبتين كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ Ey = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right) \\ E_z = E_0 \sin\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right) \end{cases}$$

2-بما أن $\left(\vec{E}, \vec{B}, \vec{K}\right)$ تشكل ثلاثي مباشر في الأمواج المستوية يمكننا كتابة:

$$\vec{B} = \frac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

و بعد حساب بسيط نكتب عبارة الحقل المغناطيسي في التمثيل الحقيقي:

$$\vec{B} = \frac{K}{\omega} E_0 \left[-\sin\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right)\vec{e}_y + \cos\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right)\vec{e}_z \right]$$

3-إن عبارة شعاع Poyntying بدلالة الحقل الكهرومغناطيسي:

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

و باستعمال عبارتي الحقلين الكهربائي و المغناطيسي في التمثيل الحقيقي نجد:

$$\vec{P} = \frac{K}{\omega \mu_0} E_0^{\,2} \left[\cos^2\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right) + \sin^2\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right) \right] \vec{e}_x$$

و بالتالي نجد العبارة التالية:

$$\vec{P} = \frac{K}{\omega \mu_0} E_0^{\,2} \vec{e}_x$$

التمرين العاشر:

الحقل الكهربائي لموجة كهرومغناطيسية تنتشر في الفراغ يعطى كمايلي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 30 \cos\left(2\Pi 10^8 t - \frac{2\Pi}{3} x \right) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

حيث أن الحقل الكهربائي يقاس بـ : $Volts/_{meter}$ و المسافة بالمتر عين :

1-التواتر.

2- طول الموجة.

3-إتجاه انتشار الموجة.

4- اتجاه المجال المغناطيسي.

الحل النموذجي:

- لدينا:

$$k = \frac{2\Pi}{3} m^{-1} \dots \omega = 2\Pi .10^8 s^{-1}$$

و بالتالي:

$$1 - \nu = \frac{\omega}{3\Pi} = 10^8 Hz$$

$$2 - \lambda = \frac{2\Pi}{k} = 3m$$

الموجة الكهرومغناطيسية تنتشر وفق المحور (Ox)–

$\left(\vec{E}, \vec{B}, \vec{K}\right)$ تشكل ثلاثي مباشر (متعامدة مثنى-مثنى) فيكون المجال المغناطيسي موازي $\vec{K} \wedge, \vec{E}$ أي وفق المحور (Oz).

التمرين الحادي عشر:

لنعتبر موجة كهرومغناطيسية تنتشر في الفضاء الحر-الخالي من الشحن و التيارات بحيث:

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{ikz - i\omega t} \\ \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y) e^{ikz - i\omega t} \end{cases}$$

1-أوجد علاقة التبديد و كذا العلاقة بين كل من : $\vec{B}_0(x, y)$ و $\vec{E}_0(x, y)$

2-ماهي الشروط الحدودية التي يحققها الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي على سطح ناقل مثالي

3-لنعتبر موجة من النمط أعلاه تنتشر داخل أسطوانة حيث السطوح الجانبية نعتبرها مكونة من معدن فائق الناقلية-أشر على الشحنة و التيار

4-عبر عن الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي في وحدة الطول و التيار في مركز الناقل

الحل النموذجي:

1-لدينا :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_e & E_y & E_z\end{vmatrix}=e^{i(kz-\omega t)}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & ik\\ E_{0e} & E_{0y} & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\left\|-ikE_{0y}\vec{e}_x+ikE_{0x}\vec{e}_y+\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial E_{0x}}{\partial y}\right)\vec{e}_z\right\|e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\left[ik\vec{e}_z\wedge\vec{E}_0+\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0\right]e^{i(kz-\omega t)}$$

و بالتالي باستعمال معادلة التحريض الكهرومغناطيسي:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

نجد مايلي:

$$ik\vec{e}_z\wedge\vec{E}_0(x,y)=i\omega\vec{B}_0(x,y)-\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0$$

و بنفس الطريقة نستعمل المعادلة:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

لنجد:

$$ik\vec{e}_z\wedge\vec{B}_0(x,y)=-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_0(x,y)-\vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0$$

ما أن $\vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0$ و $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0$ لا تتعلق إلا بالإحداثية z أما $\vec{e}_z\wedge\vec{E}_0(x,y)$ $\vec{e}_z\wedge\vec{B}_0(x,y)$ أيضا تتعلق بـ: الإحداثية z و عليه يجب أن يتحقق بالضرورة:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0=0\\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0=0\end{cases}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

و بالتالي نجد:

$$\begin{cases}ik\vec{e}_z\wedge\vec{E}_0(x,y)=i\omega\vec{B}_0(x,y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ ik\vec{e}_z\wedge\vec{B}_0(x,y)=-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_0(x,y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

مما يسمح بكتابة:

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = -\dfrac{\omega}{k}\vec{e}_z \wedge \vec{B}_0 \\ \dfrac{\omega^2}{k^2C^2} = 1 \end{cases}$$

أو:

$$k = \frac{\omega}{C}$$

التي تكون من الشكل: $\vec{B}_0$ و $\vec{E}_0$ المعادلتان (2) و (3) تسمحان بإيجاد العلاقة بين السعتين

$$\left|\vec{E}_0\right| = \frac{\omega}{k}\left|\vec{B}_0\right| = C\left|\vec{B}_0\right|$$

أما معادلات Maxwell فتعطيان النتيجة التالية: $\vec{\nabla}\vec{E} = 0,.\vec{\nabla}\vec{B} = 0$:

$$\vec{\nabla}\vec{E}_0 = 0,....\vec{\nabla}\vec{B}_0 = 0.........\,.........\,.........\,.........\,.........\,.........(4)$$

من خلال المعادلتين (1) و (4) يمكن القول أن كل من $\vec{B}_0$ و $\vec{E}_0$ تتحققان نفس العلاقات الموجودة في الكهرباء والمغناطيسية الساكنتين في الفضاء الحر (الخالي من الشحن و التيارات).

2-الشروط الحدية المحققة على سطح الناقل المثالي هي:

$$\begin{cases} \vec{n} \wedge \vec{E} = 0, \quad \vec{n}\vec{D} = 0 \\ \vec{n} \wedge \vec{H} = I_l \quad \vec{n}\vec{B} = 0 \end{cases}$$

حيث أن شعاع الوحدة $\vec{n}$ يعبر عن الناظم على سطح الناقل أما I_l فيعني كثافة التيار الخطي أو التيار في وحدة البعد يكون الحقل الكهربائي هو $\vec{E}_0(x,y)e^{i(kz_0-\omega t_0)}$ في الحالة الخاصة $z = z_0$ في اللحظة $t = t_0$ بينما $\vec{E}_0(x,y)$ يحقق المعادلات الكهروستاتيكية:

$$\vec{\mathrm{B}}_0(x,y) = \frac{1}{C}\vec{e}_z \wedge \vec{\mathrm{E}}_0(x,y)$$

4-باستعمال كل من نظريتي Ampère وGauss نجد بسهولة (حيث نعتبر سطح Gauss أسطوانة بينما محيط Ampère حلقة أو دائرة وهمية):

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\prod \varepsilon_0 r}\vec{e}_r \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\prod r}\vec{e}_\theta \end{cases}$$

حيث يرتبط التيار I بالكثافة λ بالعلاقة:

$$I = C\lambda$$

التمرين الثاني عشر:

1-أكتب معادلات Maxwell في نظام الوحدات الدولي SI(MKSA) في الفراغ في الصيغة الكلاسيكية

2-إذا غيرنا إشارة الشحنة $e \rightarrow e'=-e$ ماذا يحدث للمجال المغناطيسي و الحقل الكهربائي

3-إذا عكسنا إشارة الإحداثيات الفضائية $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'=-\vec{r}$ ماذا يحدث للمجال المغناطيسي و الحقل الكهربائي و التيار الرباعي (الكثافة الشحنة و شعاع كثافة التيار)

4 - إذا عكسنا إشارة الزمن $t \rightarrow t'=-t$ ماذا يحدث للمجال المغناطيسي و الحقل الكهربائي و التيار الرباعي.

الحل النموذجي:

نستعمل نظام الوحدات الدولي المعروف بـ: MKSA

1-في حالة الوسط الغير عازل أو الغير ممغنط تأخذ معادلات Maxwell الشكل التالي:

$$\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B}=0, \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

2-في حالة تغيير إشارة الشحنة $e \rightarrow e'=-e$ لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\rightarrow\vec{\nabla}'=\vec{\nabla}, \quad \rho\rightarrow\rho'=-\rho, \quad \vec{J}\rightarrow\vec{J}'=-\vec{J}$$

و بما أن معادلات Maxwell تأخذ نفس الشكل:

$$\vec{\nabla}'\vec{E}'=\frac{\rho'}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}'\vec{B}'=0, \quad \vec{\nabla}'\wedge\vec{B}'=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t}+\mu_0\vec{J}'$$

إن المعادلة $\vec{\nabla}'\vec{E}'=\frac{\rho'}{\varepsilon_0}$ باعتبار أن $\rho\rightarrow\rho'=-\rho$ يجب أن تكتب $\vec{E}'$ كمايلي:

$$\vec{E}'(\vec{r},t)=-\vec{E}(\vec{r},t)$$

و باستعمال معادلة التحريض الكهرومغناطيسي: $\vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t}$ و النتيجة السابقة: $\vec{E}'(\vec{r},t)=-\vec{E}(\vec{r},t)$ يجب أن يتحول المجال المغناطيسي كمايلي:

$$\vec{B}'(\vec{r},t)=-\vec{B}(\vec{r},t)$$

3- إذا عكسنا إشارة الإحداثيات الفضائية $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \to \dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t} \\ e \to e' = e \\ \vec{\nabla} \to \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla} \end{cases}$$

و بالتالي نتيجة لهذا الفعل على مختلف المقادير الفيزيائية كمايلي:

$$\rho(\vec{r},t) \to \rho'(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t),$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) \to \vec{J}'(\vec{r},t) = \rho'(\vec{r},t)\vec{v}' = \rho'(\vec{r},t)\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{J}(\vec{r},t) \quad -$$

و باستعمال معادلات Maxwell نجد:

$$\begin{cases} \vec{E}'(\vec{r},t) = -\vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}'(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t) \end{cases}$$

4 - إذا عكسنا إشارة الزمن: $t \longrightarrow t' = -t$

$$\begin{cases} \vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \to \vec{\nabla}' = \vec{\nabla} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \to \dfrac{\partial}{\partial t'} = -\dfrac{\partial}{\partial t}, \\ e \to e' = e \end{cases}$$

يصبح لدينا

$$\rho(\vec{r},t) \to \rho'(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t), \quad \vec{J}(\vec{r},t) \to \vec{J}'(\vec{r},t) = \rho'(\vec{r},t)\vec{v}' = \rho'(\vec{r},t)\frac{d\vec{r}'}{dt'} = -\vec{J}(\vec{r},t)$$

و باستعمال معادلات Maxwell نجد:

$$\begin{cases} \vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}'(\vec{r},t) = -\vec{B}(\vec{r},t) \end{cases}$$

التمرين الثالث عشر:

نعتبر موجة مستوية $A_\mu(\vec{r},t) = a_\mu e^{i(\vec{K}\vec{r} - \omega t)}$ حيث يمثل a_μ شعاع رباعي ثابت. زيادة على ذلك يكون الكمون الرباعي من الشكل: $A_\mu = (\varphi, \quad A_x, \quad A_y, \quad A_z,)$. نفرض أن $\vec{K} = K\vec{e}_z$ و نختار أساس الشعاع الرباعي الثابت كمايلي:

$$\begin{cases} \varepsilon^{(1)\mu} = (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0,) \\ \varepsilon^{(2)\mu} = (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0,) \\ \varepsilon^{(L)\mu} = \frac{1}{K}\left(\frac{\omega}{C}, \quad 0, \quad 0, \quad K,\right) = \frac{1}{K} K^{\mu} \\ \varepsilon^{(B)\mu} = \frac{1}{K}\left(K, \quad 0, \quad 0, \quad -\frac{\omega}{C}\right) \end{cases}$$

أما الشعاع الرباعي الثابت فنكتبه بدلالة هذا الأساس: $\varepsilon^{\mu}(\varepsilon^{0}, \varepsilon)$ حيث أن

$$a_{\mu} = a_1 \varepsilon^{(1)\mu} + a_{2.} \varepsilon^{(2)\mu} + a_L \varepsilon^{(L)\mu} + a_B \varepsilon^{(B)\mu}$$

ماهي الشروط التي تحققها الثوابت $a_1, a_{2.}, a_L, a_B$ باستعمال معادلات Maxwell في نظام CGS.

$$(a) - \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$(b) - \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$(c) - \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{C}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$(d) - \vec{\nabla}\vec{E} = 0,$$

التي تكون مستقلة. ماهي الوسائط $a_1, a_{2.}, a_L, a_B$

أعط القيمة المتوسطة لكثافة الطاقة بدلالة الوسائط بتطبيق الشرطان (a) و (d).

الحل النموذجي:

نعرف الشعاعان الرباعيان K^{μ} و A_{μ} (باعتبار أن مترية الفضاء $g_{\mu\nu} = diag(+,-,-,-)$ و هذا الاصطلاح يختلف عن المترية $g_{\mu\nu} = diag(+,+,+,-)$ التي نكتب فيها المركبة الرابعة الموافقة للمركبة الزمنية السلمية بعد المركبات الكلاسيكية الثلاثة الشعاعية في حين أنه في الاصطلاح الأول نكتب المركبة السلمية قبل المركبات الكلاسيكية و هو ما اعتمدناه في هذا التمرين و الجدير بالذكر أن النتائج الفيزيائية في النهاية تكون نفسها في الحالتين):

$$\begin{cases} K^{\mu} = \left(\frac{\omega}{C}, \quad 0, \quad 0, \quad K,\right) \\ A_{\mu} = (\varphi, \quad A_x, \quad A_y, \quad A_z,) \end{cases}$$

وللموجة المستوية $K=\dfrac{\omega}{C}$ حيث أن $\vec{K}=K\vec{e}_z$ و $\vec{K}\vec{r}=Kz$. من أجل $\mu=1$ لدينا الكمون السلمي:

$$\varphi=\left[a_L\ \frac{\omega}{Kc}+a_B\left(\frac{\vec{K}}{K}\right)\right]e^{i(Kz-\omega t)}$$

من أجل $\mu=2,3,4$ نحصل على عبارة الكمون الشعاعي:

$$\vec{A}=\left[a_1\vec{e}_x+a_2\vec{e}_y+(a_L-a_B)\vec{e}_z\right]e^{i(Kz-\omega t)}$$

و بالتالي نجد المجال المغناطيسي و الحقل الكهربائي على التوالي:

$$\begin{cases}\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=i\vec{K}\left[-a_2\vec{e}_x+a_1\vec{e}_{y_z}\right]e^{i(Kz-\omega t)}\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-i\vec{K}\left[a_1\vec{e}_x+a_2\vec{e}_y-(2a_B)\vec{e}_z\right]e^{i(Kz-\omega t)}\end{cases}$$

- إن المعادلة :

$$\vec{\nabla}\vec{B}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\equiv 0$$

لا تعطي أي شرط جديد

-بينما المعادلة:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\varphi\right)-\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\equiv 0$$

لا تظيف أي شرط أيضا

-بينما المعادلات:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=iK\vec{e}_z\wedge\vec{B}=K^2\left[a_1\vec{e}_x+a_2\vec{e}_y\right]e^{i(Kz-\omega t)}\\ \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\vec{K}\vec{E}\left[a_1\vec{e}_x+a_2\vec{e}_y-(2a_B)\vec{e}_z\right]e^{i(Kz-\omega t)}\\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B}-\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0\end{cases}$$

تتطلب وضع $a_B=0$. بما أن:

$$\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\partial E_z}{\partial z}=2K^2a_Be^{i(Kz-\omega t)}\equiv 0$$

تتطلب وضع $a_B=0$. أي في شرط المعايرة $\vec{\nabla}\vec{A}=0$ الثابتان a_2 و a_1 - لا يظهران في الشرط المعاير - Colomb لذلك يكونان ثابتان مستقلان و نفس الشيء في شرط معايرة Lorentz

$$\vec{\nabla}\vec{A}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

أما كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية فهي كمايلي:

$$W=\frac{1}{16\prod}\left(\left|\vec{E}\right|^{2}+\left|\vec{B}\right|^{2}\right)=\frac{K^{2}}{8\prod}\left(a_{1}^{2}+a_{2}^{2}\right)$$

التمرين الرابع عشر:

لتكن $\vec{A}_{w,}\phi_{w},\vec{J}_{w}$ و ρ_{w} تحويلات Fourier لكل من شعاع كثافة التيار-الكمون السلمي-الكمون الشعاعي و كثافة الشحنة بين أن:

$$\begin{cases}\phi_{w}\left(\vec{r}\right)=\dfrac{1}{4\prod\varepsilon_{0}}\displaystyle\int\rho_{w}\left(\vec{r}'\right)\dfrac{e^{i\vec{K}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d^{3}r\\ \vec{A}_{w}\left(\vec{r}\right)=\dfrac{\mu_{0}}{4\prod}\displaystyle\int\vec{J}_{w}\left(\vec{r}'\right)\dfrac{e^{i\vec{K}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d^{3}r\\ K=\dfrac{\omega}{C}\end{cases}$$

كيف نعبر عن إنحفاظ الشحنة-التيار بدلالة $\vec{J}_{w}$ و ρ_{w}

جد عبارة كل من الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي $r\to\infty$

أبحث عن هذه الحقول عندما $\vec{J}_{w}\left(\vec{r}\right)=\vec{r}f\left(\vec{r}\right)$

الحل النموذجي:

إذا عبرنا عن شعاع كثافة التيار بتحويل Fourier لدينا العبارة المعروفة التالية:

$$\vec{J}\left(\vec{r},t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{J}_{w}\left(\vec{r}\right)e^{-i\omega t}d\omega$$

الكمون الشعاعي الموافق له:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\Pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{J}\left(\vec{r}',t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{C}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\Pi}\displaystyle\int \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}_w(\vec{r})e^{-i\omega t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{C}t} d\omega \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\Pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int \dfrac{\vec{J}_w(\vec{r})e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}|} d^3r' \end{cases}$$

و بالتالي يكون تحويل Fourier للكمون الشعاعي كمايلي:

$$\vec{A}_w(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\Pi}\int \frac{\vec{J}_w(\vec{r})e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}|} d^3r'$$

و بنفس الطريقة نجد تحويل Fourier للكمون السلمي كمايلي:

$$\phi_w(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\Pi}\int \frac{\rho_w(\vec{r})e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}|} d^3r'$$

معادلة الاستمرارية $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0$ تكتب تحويل Fourier كمايلي:

$$\frac{\partial \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_w(\vec{r})e^{-i\omega t} d\omega}{\partial t} + \vec{\nabla}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}_w(\vec{r})e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

أو من الشكل المكافئ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-i\omega\rho_w(\vec{r}) + \vec{\nabla}\vec{J}_w(\vec{r})\right]e^{-i\omega t} d\omega$$

و بالتالي نجد:

$$-i\omega\rho_w(\vec{r}) + \vec{\nabla}\vec{J}_w(\vec{r}) = 0$$

عندما تكون: $r \to \infty$ نستعمل التقريب المعروف:

$$|\vec{r}-\vec{r}| \approx \vec{r} - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}$$

و بالتالي نستطيع كتابة:

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{J}_w e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}|} \approx \vec{J}_w \dfrac{e^{i\vec{K}\vec{r}}}{r}\left(1 - iK\dfrac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \ldots\right)\left(1 + \dfrac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \ldots\right) \\ \dfrac{\vec{J}_w e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}|} \approx \vec{J}_w \dfrac{e^{i\vec{K}\vec{r}}}{r}\left(1 - iK\dfrac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right) \end{cases}$$

لنعتبر:

$$\vec{\nabla}'\left(x'\vec{J}_w\right) = J_{wx'} + x'\vec{\nabla}\vec{J}_w$$

لنستعمل نظرية Ostrogradski:

$$\int \vec{\nabla}'\left(x'\vec{J}_w\right)d^3r' = \oint x'\vec{J}_w ds' = 0$$

من أجل توزيع منته (محدود) للتيار:

$$\int \vec{J}_w d^3r' = -\int \vec{r}\vec{\nabla}'\vec{J}_w d^3r$$

و بما أن يمكننا بشكل عام كتابة أي كائن رياضي على شكل مجموع حدين أحدهما الجزء المتناظر و الأخر الجزء الغير متناظر أي بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} \vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{1}{2}\left[\vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}') - \vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}')\right] + \dfrac{1}{2}\left[\vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}') + \vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}')\right] \\ \vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{1}{2}\left(\vec{r}' \wedge \vec{J}_w\right) \wedge \vec{r} + \dfrac{1}{2}\left[\vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}') + \vec{J}_w(\vec{r},\vec{r}')\right] \end{cases}$$

يمثل الحد الثاني رباعي قطب كهربائي يمكن إهماله لأننا نهتم بالحدود الدنيا و بالتالي:

$$\vec{A}_w(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\rightarrow} \frac{\mu_0}{4\prod}\left(-i\omega P_w \frac{e^{iKr}}{r} - iKm_w \wedge \frac{\vec{r}}{r}e^{iKr}\right)$$

حيث أن:

$$P_w = \int \vec{r}'\rho_w(\vec{r}')d^3r'$$

$$m_w = \frac{1}{2}\int \vec{r}' \wedge \vec{J}_w(\vec{r}')d^3r'$$

نستعمل معادلات Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

نستعمل تحويلات Fourier لكل من الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي لنجد:

$$\vec{\nabla} \wedge \int \vec{B}_w(\vec{r}) e^{-\omega t} d\omega = \frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}_w(\vec{r}) e^{-\omega t} d\omega$$

التي تصبح كمايلي:

$$\int \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_w(\vec{r}) e^{-\omega t} d\omega = -\int \frac{i\omega}{C^2} \vec{E}_w(\vec{r}) e^{-\omega t} d\omega$$

حيث نجد:

$$\vec{E}_w(\vec{r}) = \frac{i\omega}{C^2} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_w(\vec{r})$$

و بنفس الطريقة نجد:

$$\vec{B}_w(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_w(\vec{r})$$

من أجل كثافة التيار $\vec{J}_w(\vec{r}) = \vec{r} f(\vec{r})$ لدينا:

$$m_w = \frac{1}{2} \int \vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,' f(\vec{r}\,') d^3 r' = \frac{i}{\omega} \int \vec{J}_w(\vec{r}\,') d^3 r' = \frac{i}{\omega} \int \vec{r}\,' f(\vec{r}\,') d^3 r'$$

نستعمل المعادلات السابقة لنجد:

$$\vec{A}_w(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 e^{iKr}}{4\prod r} \int \vec{r}\,' f(\vec{r}\,') d^3 r'$$

و بالتالي

$$\begin{cases} \vec{B}_w(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_w(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 e^{iKr}}{4\prod r} \vec{r} \wedge \int \vec{r}\,' f(\vec{r}\,') d^3 r' \\ \vec{E}_w(\vec{r}) = \dfrac{i\omega}{C^2} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_w(\vec{r}) \approx -iC \dfrac{\mu_0 K e^{iKr}}{4\prod r} \vec{r} \wedge \left[\vec{r} \wedge \int \vec{r}\,' f(\vec{r}\,') d^3 r'\right] \end{cases}$$

التمرين الخامس عشر:

1-أكتب معادلات Maxwell في وسط غير ناقل حيث تكون كل من سماحيته و نفاذيته ثابتتين. بالإضافة لكون $(\rho = \vec{J} = 0)$

بين أن كل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ تتحققان معادلة موجة.

اكتب حلول الأمواج المستوية لكل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$

2-ناقش حالة الورود و الانكسار لموجة كهرومغناطيسية مستوية تنتشر بين وسطين عازلين يفصل بينهما سطح مستوى.

الحل النموذجي:

1- معادلات Maxwell في وسط غير ناقل حيث تكون كل من سماحيته و نفاذيته ثابتتين بالإضافة لكون $\left(\rho = \vec{J} = 0\right)$ فيه تكون من الشكل التالي:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} ....(1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} ....(2) \\ \vec{\nabla}\vec{D} = 0.........\,.......(3) \\ \vec{\nabla}\vec{B} = 0.........\,.......(4) \end{cases}$$

حيث أن $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ و $\vec{B} = \mu\vec{H}$ أما ε و μ فيعبران عن كل من السماحية الكهربائية و النفاذية المغناطيسية للوسط العازل المتجانس و المتماثل المناحي حيث أنهما ثابتتين في إطار هذه الشروط. لدينا:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (2) كمايلي:

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

المعادلة (1) تعطينا:

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

و بالمثل نجد:

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

و بالتالي فكل من الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي يحققان معادلة الانتشار الموجية المماثلة لـ:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

و بالتالي يمكن أن تكون عبارة السرعة كمايلي:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varpi\varepsilon}}$$

إن الحلول الخاصة بالأمواج المستوية للحقل الكهرومغناطيسي تكون حسب العبارتين التاليتين:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K}\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{K}\vec{r}-\omega t)} \end{cases}$$

حيث تشكل كل من السعتين $\vec{E}_0$ و $\vec{B}_0$ وكذا الشعاع الموجي $\vec{K}$ ثلاثي مباشر. زيادة على ذلك كل من $\vec{E}$ و $\vec{B}$ يحققان العلاقة التالية:

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\vec{K}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

2-الحقل الكهربائي للموجة الكهرومغناطيسية الواردة و المنعكسة و المنكسرة على التوالي كمايلي:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K}\vec{r}-\omega t)}$$
$$\vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}_0' e^{i(\vec{K}'\vec{r}-\omega' t)}$$
$$\vec{E}''(\vec{r},t) = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{K}''\vec{r}-\omega'' t)}$$

بتطبيق الشروط الحدودية على سطح الفصل حيث تكون المركبة المماسية للحقل الكهربائي المنتمية لوسط الورود مساوية للمركبة المماسية للحقل الكهربائي المنتمية لوسط العبور على سطح الفصل بحيث المركبة المماسية في وسط الورود هي مجموع المركبتين المماسيتين لكل من الموجة الواردة و المنعكسة بينما المركبة المماسية للموجة في وسط العبور تتمثل في الموجة العابرة و بالتالي:

$$\vec{n} \wedge \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{K}\vec{r}-\omega t)} + \vec{E}'_0\, e^{i(\vec{K}'\vec{r}-\omega' t)}\right) = \vec{n} \wedge \vec{E}''_0\, e^{i(K''r-\omega'' t)}$$

و بالتالي يكون لدينا:

$$\begin{cases} \omega = \omega' = \omega'' \\ \vec{K}\vec{r} = \vec{K}'\vec{r} = \vec{K}''\vec{r} \end{cases}$$

إذا رمزنا بـ: θ', θ و θ'' لزوايا الورود-الانعكاس و الانكسار على التوالي التي بالترتيب الزاوية التحى يصنعها الشعاع الموجي للموجة الواردة مع الناظم على سطح الفصل و الزاوية التي يصنعها الشعاع الموجي للموجة المنعكسة مع الناظم على سطح الفصل و الزاوية التي يصنعها الشعاع الموجي للموجة المنكسرة مع الناظم على سطح الفصل يكون لدينا:

$$\begin{cases} \vec{r}(x,y,z) \\ \vec{K} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,(\sin(\theta),0,\cos(\theta)) \\ \vec{K}' = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,(\sin(\theta'),0,-\cos(\theta')) \\ \vec{K} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,(\sin(\theta''),0,\cos(\theta'')) \end{cases}$$

و ينتج:

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\sin(\theta) = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\sin(\theta') = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\sin(\theta'')$$

أي أن $\theta = \theta'$ و باعتبار أن $\frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}$ نجد مايلي:

$$\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta'')} \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

التمرين السادس عشر:

سرعة الضوء C و كل من السماحية ε_0 و النفاذية μ_0 تحقق العلاقة:

$C = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ -1 $C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ -2 $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ -3

الجواب:

الصحيح رقم 3

التمرين السابع عشر:

لنعتبر احد الحلول الممكنة لمعادلات Maxwellمايلي:

$$\vec{A}(x,t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \qquad V(x,t) = 0$$

حيث $\vec{A}(x,t)$ و $V(x,t)$ هما الكمونيين الشعاعي و السلمي على التوالي أما $\vec{A}_0$ و ω و k نعتبرها ثوابت مستقلة عن الفضاء و الزمن

أعط تفسير فيزيائي لهذه الثوابت إنطلاقا من معادلات Maxwell التالية:

$$(a) - \vec{\nabla}\vec{B} = 0 ......(b) - \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(c) - \vec{\nabla}\vec{E} = 0 ......(d) - \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

الحل النموذجي:

من الواضح أن الكمون الشعاعي يمكن إعادة كتابته كمايلي:

$$\vec{A}(x,t) = \vec{A}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_w w - \omega t)}$$

و بالتالي نجد بسهولة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}(x,t)}{\partial x} = i(k_y z - k_z y)\vec{A}(x,t) \\ \dfrac{\partial \vec{A}(x,t)}{\partial y} = i(k_z x - k_x z)\vec{A}(x,t) \\ \dfrac{\partial \vec{A}(x,t)}{\partial z} = i(k_x y - k_y x)\vec{A}(x,t) \end{cases}$$

و منه نستطيع كتابة:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,t) = i\vec{k} \wedge \vec{A}(x,t)$$

الحقل الكهرومغناطيسي $(\vec{E};\vec{B})$ يمكن استنتاجه كمايلي:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i\vec{k} \wedge \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\frac{\omega}{C}\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

-لان $\vec{\nabla}\vec{B} = -\vec{K}(\vec{k} \wedge \vec{A}_0)e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \equiv 0$ لا جديد تضيفه هذه المعادلة.

-لان $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\omega}{C}\vec{k} \wedge \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \dfrac{\omega}{C}\vec{k} \wedge \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \equiv 0$ لا جديد تضيفه هذه المعادلة

-لان $\vec{\nabla}\vec{E} = i\dfrac{\omega}{C}\vec{K}\vec{A} \equiv 0$ هذا معناه أن $\vec{A}$ و $\vec{K}$ متعامدان

-لان $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(K^2 - \dfrac{\omega^2}{C^2}\right)\vec{A} \equiv 0$ هذا معناه أن $K^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2}$ و نقبل الحل الفيزيائي $K = \dfrac{\omega}{C}$

—

التمرين الثامن عشر:

لنعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تواترها ω و شعاعها الموجي $|\vec{K}|$ تنتشر في وسط عازل متجانس (homogeneous) غير متماثل المناحي (anisotropic) غير ناقل (non-conducting) نفاذيته المغناطيسية $\mu = 1$

1-بين أن الحقل $\left(\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu}\right)$ عمودي على كل من $\vec{E},\vec{D}$ و $\vec{K}$ وكذلك أيضا يكون $\vec{H}$ عرضي (transverse) لكن الحقل $\vec{E}$ ليس كذلك.

2-لتكن $D_k = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{kl} E_l$ حيث يكون ε_{kl} تنسور حقيقي متناظر. لنختار ما يسمى بالمحاور الأساسية (the principal axes) لـ:

ε_{kl} كجملة إحداثيات بحيث يكون $\left(D_k = \varepsilon_k E_k\right)$

نعرف $\vec{K} = K\vec{S}$ بحيث مركبات شعاع الوحدة $\vec{S}$ على المحاور الأساسية تكون: S_2, S_1 و S_3. إذا وضعنا $V = \frac{\omega}{K}$ و

$V_j = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_j}}$ بين أن مركبات الحقل الكهربائي تحقق:

$$\left\{ S_j \sum_{i=1}^{3} S_i E_1 + \left(\frac{V^2}{V_j^2} - 1\right) E_j = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} S_1\left(S_1E_1 + S_2E_2 + S_3E_3\right) + \left(\frac{V^2}{V_1^2} - 1\right) E_1 = 0 \\ S_2\left(S_1E_1 + S_2E_2 + S_3E_3\right) + \left(\frac{V^2}{V_2^2} - 1\right) E_2 = 0 \\ S_3\left(S_1E_1 + S_2E_2 + S_3E_3\right) + \left(\frac{V^2}{V_3^2} - 1\right) E_3 = 0 \end{array} \right.$$

أكتب معادلة سرعة الطور(the phase velocity) $\vec{V}$ بدلالة مركبات $\vec{S}$ و V_j و بين أنها تحوي نوعان من الجذور المنتهية لـ: V^2 توافق منفصلين من أنماط الانتشار في الاتجاه $\vec{S}$

<u>الحل النموذجي</u>:

نستعمل نظام الوحدات CGS:

1-معادلات Maxwell في هذا الوسط تكتب كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \vec{D} = 0 \end{cases}$$

تكون الموجة المستوية متناسبة مع $e^{i\left(\vec{K}\vec{r} - \omega t\right)}$ و بالتالي كما و سبق أن أشرنا لذلك نعوض:

$\vec{\nabla} \wedge \to i\vec{K} \wedge, .. \vec{\nabla} \to i\vec{K}, ... \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ و بالتالي نعيد كتابة معادلات Maxwell في هذا الوسط في هذه الحالة كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{K} \wedge \vec{E} = \dfrac{\omega}{K}\vec{H} \\ \vec{K} \wedge \vec{H} = -\dfrac{\omega}{C}\vec{D} \\ \vec{K}\vec{B} = 0 \\ \vec{K}\vec{D} = 0 \end{cases}$$

و بالتالي نستطيع كتابة:

$$\vec{D}\vec{H} = -\frac{\omega}{C}\left(\vec{K} \wedge \vec{H}\right)\vec{H} \equiv 0$$

$$\vec{K}\vec{H} = \frac{\omega}{C}\vec{K}\left(\vec{K} \wedge \vec{E}\right) \equiv 0$$

و عليه تكون $\vec{D},\vec{K}$ و $\vec{H}$ متعامدة مثنى-مثنى (mutually perpendicular) و بالتالي $\vec{D}$ و $\vec{H}$ عرضيان على $\vec{K}$ و بما أن:

$\vec{K} \wedge \left(\vec{K} \wedge \vec{E}\right) = \dfrac{\omega}{C}\vec{K} \wedge \vec{H}$ و نجد:

$$\vec{K}\vec{E} = \frac{1}{K}\left(\frac{\omega}{C}\vec{K} \wedge \vec{H} + K^2\vec{E}\right) = \frac{1}{K}\left(-\left(\frac{\omega}{C}\right)^2\vec{D} + K^2\vec{E}\right) \neq 0$$

بإستثناء الحالة $K^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2}$ لا يكون $\vec{E}$ عرضي على $\vec{K}$.

2- انطلاقا مما سبق التوصل إليه من نتائج يمكننا كتابة مايلي:

$$\vec{K}\left(\vec{K}\vec{E}\right) - K^2\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{C}\right)^2\vec{D}........(1)$$

بما أن:

$$\begin{cases} \vec{K} = K\left(S_1, S_2, S_3\right) \\ \vec{D} = \left(\varepsilon_1 E_1, \varepsilon_2 E_2, \varepsilon_3 E_3\right) \\ \vec{E} = \left(E_1, E_2, E_3\right) \end{cases}$$

المركبة j للمعادلة (1) هي بالضرورة:

$$S_j K^2 \sum_{i=1}^{3} S_i E_i - K^2 E_j = -\left(\frac{\omega}{C}\right)^2 \varepsilon_j E_j = 0$$

بوضع $V^2 = \frac{\omega^2}{K^2}$ و $\frac{C^2}{\varepsilon_j} = V_j^{\ 2}$ تصبح المعادلة السابقة على النحو التالي:

$$S_j \sum_{i=1}^{3} S_i E_1 + \left(\frac{V^2}{V_j^{\ 2}} - 1 \right) E_j = 0$$

من أجل $j = 1,2,3$ لدينا بالتفصيل:

$$\begin{cases} S_1 \left(S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right) + \left(\frac{V^2}{V_1^{\ 2}} - 1 \right) E_1 = 0 \\ S_2 \left(S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right) + \left(\frac{V^2}{V_2^{\ 2}} - 1 \right) E_2 = 0 \\ S_3 \left(S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3 E_3 \right) + \left(\frac{V^2}{V_3^{\ 2}} - 1 \right) E_3 = 0 \end{cases}$$

أو:

$$\begin{cases} \left(S_1^{\ 2} + \frac{V^2}{V_1^{\ 2}} - 1 \right) E_1 + S_1 S_2 E_2 + S_1 S_3 E_3 = 0 \\ S_1 S_2 E_1 + \left(S_2^{\ 2} + \frac{V^2}{V_2^{\ 2}} - 1 \right) E_2 + S_1 S_3 E_3 = 0 \\ S_3 S_1 E_1 + S_3 S_2 E_2 + \left(S_3^{\ 2} + \frac{V^2}{V_3^{\ 2}} - 1 \right) E_3 = 0 \end{cases}$$

الشرط الكافي و الضروري لكي تقبل ه الجمله حلول غير معدومة هو انعدام المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} \left(S_1^{\ 2} + \frac{V^2}{V_1^2} - 1 \right) & S_1 S_2 & S_1 S_3 \\ S_2 S_1 & \left(S_2^{\ 2} + \frac{V^2}{V_2^{\ 2}} - 1 \right) & S_2 S_3 \\ S_3 S_1 & S_3 S_2 & \left(S_3^{\ 2} + \frac{V^2}{V_3^{\ 2}} - 1 \right) \end{vmatrix} = 0$$

و بالتالي نجد:

$$V^2\left[\begin{array}{l}\dfrac{V^4}{V_1^2V_2^2V_3^2}+\left(S_1^2-1\right)\dfrac{V^2}{V_2^2V_3^2}+\left(S_2^2-1\right)\dfrac{V^2}{V_1^2V_3^2}+\left(S_3^2-1\right)\dfrac{V^2}{V_2^2V_1^2}+\\+\left(\dfrac{S_1^2}{V_1^2}+\dfrac{S_2^2}{V_2^2}+\dfrac{S_3^2}{V_3^2}\right)\end{array}\right]=0$$

يمكن إيجاد نوعين من الأنماط إذا كان :

$$V^2=\frac{\omega^2}{K^2}\neq 0$$

التمرين التاسع عشر:

لدينا اسطوانتان محورهما المشترك (Oz) نصف قطريهما $r_1\langle r_2$ الوسط المحصور بينهما فراغ حيث مبدأ الإحداثيات (O) في منتصف الاسطوانتين. في الفضاء المعرف بـ: $z\langle 0$ مملوء بعازل ثابت سماحيته الكهربائية $\varepsilon_1=1$ أما الفضاء المعرف بـ: $z\rangle 0$ مملوء بعازل ثابت سماحيته الكهربائية $\varepsilon_1\rangle 1$

1-صف الموجة من النوع العرضية الكهرومغناطيسية TEM

2-إذا وردت موجه كهرومغناطيسية من النوع السابق من اليسار أحسب الأمواج العابرة للوسط $z\rangle 0$ و المنعكسة على z=0 نحو $z\langle 0$

3-ماهي الطاقة العابرة و الطاقة المنعكسة.

الحل النموذجي:

نفسر ε على أنها السماحية النسبية للوسط العازل حيث أن سماحية هذا الوسط هي: $\varepsilon\varepsilon_0$ و نستعمل نظام الوحدات MKSA(SI)

1-في المنطقة الاولى $z\rangle 0$. نفرض $\mu=\mu_0$ من أجل الموجة الجيبية $\dfrac{\partial}{\partial t}\rightarrow -i\omega$ حيث أن معادلات الانتشار تؤول إلى:

$$\left(\Delta+\varepsilon\frac{\omega^2}{C^2}\right)\vec{E}'=0$$

$$\left(\Delta+\varepsilon\frac{\omega^2}{C^2}\right)\vec{B}'=0$$

و نظرا للتناظر الاسطواني (المحور المشترك للاسطوانتين هو (Oz) نفرض أن الحل الخاص للمعادلتين السابقتين من الشكل:

$$\begin{cases}\vec{E}'(\vec{r},t)=\vec{E}'(x,y)e^{i(K'z-\omega t)}\\ \vec{B}'(\vec{r},t)=\vec{B}'(x,y)e^{i(K'z-\omega t)}\end{cases}$$

حيث أن $K'^2 = \varepsilon \dfrac{\omega^2}{C^2}$ نفرض أن:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

نحلل الحقل الكهرومغناطيسي إلى مركبتين عرضية (transverse) و طولية (longitudinal) كمايلي:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_t + E_z \vec{e}_z$$
$$\vec{B}' = \vec{B}'_t + B_z \vec{e}_z$$

من أجل الموجة من النوع العرضية الكهرومغناطيسية TEM يكون $E_z = B_z = 0$. و بالتالي المعادلة $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$ تصبح:

$$\vec{\nabla}\vec{E}_t = 0$$

أما معادلة التحريض الكهرومغناطيسي $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = -\dfrac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = i\omega \vec{B}'$

تؤول إلى:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}'_t = 0$$

تسمح هذه المعادلات بإدخال دالة سلمية ϕ بحيث:

$$\begin{cases} \vec{E}'_t = -\vec{\nabla}\phi \\ \vec{\nabla}^2 \phi = 0 \end{cases}$$

حيث الدالة السلمية ϕ تكون متغيرة بدلالة r فقط و بالتالي تحقق المعادلة:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

التي يكون حلها من الشكل:

$$\phi(r) = a \ln(r) + b ...(a, b = cts)$$

و عليه تكون عبارة الحقل الكهربائي:

$$\vec{E}'_t = -\vec{\nabla}\phi = \frac{a}{r} e^{i(K'z - \omega t)} \vec{e}_r$$

أما المجال المغناطيسي المرافق فنستنتجه إنطلاقا من معادلة التحريض الكهرومغناطيسي $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = -\dfrac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = i\omega \vec{B}'$ لنجد:

$$\vec{B}'_t = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} \vec{e}_z \wedge \vec{E}'_t = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} \frac{a}{r} e^{i(K'z - \omega t)} \vec{e}_\theta$$

بنفس الطريقة في حالة في الفضاء المعرف بـ: $z\langle 0$ نجد:

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{A}{r}e^{i(K'z-\omega t)}\vec{e}_r\\ \vec{B}==\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{C}\dfrac{A}{r}e^{i(K'z-\omega t)}\vec{e}_\theta\end{cases}$$

2-الموجة الواردة من الوسط $z\langle 0$ هي $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ أما الموجة العابرة للوسط $z\rangle 0$ هي $\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)$ في حين أن الموجة المنعكسة إلى الوسط $z\langle 0$ هي $\left(\vec{E}'',\vec{B}''\right)$ و سطح الانعكاس و الانكسار هو المستوى الذي معادلته $z=0$

إن الحق الكهرومغناطيسي للموجة المنعكسة (reflected wave) يكون من الشكل (بالفرض أنه من النوع TEM:

$$\begin{cases}\vec{E}''=\dfrac{D}{r}e^{i(K'z-\omega t)}\vec{e}_r\\ \vec{B}''=-\dfrac{1}{C}\dfrac{D}{r}e^{i(K'z-\omega t)}\vec{e}_\theta\\ \vec{K}''=-\vec{K}\\ \omega=\omega'=\omega''\end{cases}$$

الشروط الحدودية على المستوى $z=0$ يعطينا:

$$\left|\left(E_r+E_r''-E_r'\right)\right|_{z=0}=0$$
$$\left|\left(B_\theta+B_\theta''-B_\theta'\right)\right|_{z=0}=0$$

و بالتالي نستنتج:

$$\begin{cases}a=\dfrac{2A}{1+\sqrt{\varepsilon}}\\ D=\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}A\end{cases}$$

3-معاملي الانعكاس و الانكسار:

$$\begin{cases}T=\left|\dfrac{\vec{E}'}{\vec{E}}\right|^2=\left(\dfrac{a}{A}\right)^2=\left(2\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\\ R=\left|\dfrac{\vec{E}''}{\vec{E}}\right|^2=\left(\dfrac{D}{A}\right)^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\end{cases}$$

إن مبدأ إنحفاظ الطاقة يقتضي $R+T=1$ بإهمال الامتصاص في سطح الفصل بين الوسطين.

التمرين العشرون:

لنعتبر موجة كهرومغناطيسية تواترها ω تنتشر في وسط يحتوي على إلكترونات حرة كثافتها n_e

1-أوجد كثافة التيارالمحتث بالحقل الكهربائي حيث إننا نهمل التفاعل بين الالكترونات

2-انطلاقا من معادلات Maxwell اكتب مختلف خواص الموجة في الوسط

3-أوجد الشرط اللازم و الكافي لكي تنتشر الأمواج الكهرومغناطيسية في الوسط بشكل متطابق

الحل النموذجي:

معادلة حركة إلكترون في وجود حقل كهرومغناطيسي(حيث نعتبر فقط قوة Lorentz الكهربائية و نهمل تأثير قوة Lorentz المغناطيسية):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

و باعتبار انه في حالة الأمواج الكهرومغناطيسية نعوض $\frac{\partial}{\partial t}$ ب: $-i\omega$ تصبح العبارة أعلاه كمايلي:

$$\vec{v} = -i\frac{e\vec{E}}{m\omega}$$

و بالتالي تكون عبارة التيار المحتث:

$$\vec{J} = -n_e\vec{v}e = i\frac{n_e e^2\vec{E}}{m\omega}$$

معادلات Maxwell في هذا الوسط تكتب كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} \dots\dots\dots (2) \\ \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \\ \vec{\nabla}\vec{D} = \rho \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

المعادلتان (1) و (2) تسمحان بكتابة العبارة التالية:

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}\right)$$

المعادلة (4) تسمح بكتابة:

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 n_e e^2}{m\omega^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

و بالتالي نجد:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2}\left(1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

حيث أن $\omega_p{}^2 = \frac{n_e e^2}{m\omega^2}$ و بالمثل نجد عبارة مماثلة تخص المجال المغناطيسي

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{C^2}\left(1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

و بوضع:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \approx e^{i\vec{K}\vec{r}} e^{-i\omega t}$$

نجد:

$$K^2 C^2 = \omega^2 - \omega_p{}^2$$

الشرط اللازم لحدوث الانتشار $\omega^2 \rangle \omega_p{}^2$ و بالتالي نحصل على:

$$n_e \langle \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{e^2}$$

أو شرط التطابق و هو المطلوب.

التمرين الواحد و العشرين:

شعاع الاستقطاب (ثنائي القطب الكهربائي في وحدة الحجم) $\vec{P} = \gamma \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ حيث γ ثابت. نعتبر أن الوسط غير ناقل $\left(\vec{J}_{free} = 0\right)$ و غير ممغنط $\vec{M} = 0$. لنعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تواترها الحقيقي ω بحيث نفرض أن الانتشار وفق الاتجاه الموجب لـ: z+. أيضا نفرض أن $1 \prec\prec \frac{\gamma\omega}{C}$ و نستعمل التقريب $\sqrt{1+S} \approx 1 + \frac{1}{2}S$

1-ابحث على إمكانية إيجاد نوعين من قرائن الانكسار (indices of refraction) والحقل الكهربائي الموافق لكل منهما

الحل النموذجي:

1-إن الحقول: $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}, \vec{B}$ و $\vec{M}$ التي هي المجال المغناطيسي-شعاع الاستقطاب-الحقل الكهربائي-الإزاحة الكهربائية و المغنطة على التوالي تعرف مختلف علاقاتها يبعضها في الحالة العامة(حالة وسط مادي عازل غير متجانس و ممغنط) كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \end{cases}$$

في حالتنا $\vec{E} \wedge \vec{\nabla} \gamma = \vec{P}$ و $0 = \vec{M}$ و بالتالي نجد:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \gamma \vec{\nabla} \wedge \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases}$$

يمكن كتابة إنطلاقا من معادلات Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

و بالتالي نجد بسهولة:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \gamma \vec{\nabla} \wedge \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) = -\Delta \vec{E} \end{cases}$$

لنستعمل معادلة التحريض الكهرومغناطيسي لنجد:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) = -\vec{\nabla} \wedge \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ -\Delta \vec{E} = -\dfrac{1}{C^2} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \vec{\nabla} \wedge \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

من أجل موجة كهرومغناطيسية مستوية من الشكل:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(Kz - \omega t)} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

نعوض كل من $\vec{\nabla}, \dfrac{\partial}{\partial t}$ بـ: $ik\vec{e}_z, -i\omega$ على التوالي. و بالتالي تصبح المعادلة (1) كمايلي:

$$K^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{C^2} \vec{E} + i\omega^2 \mu_0 \gamma K \vec{e}_z \wedge \vec{E}$$

بإسقاط هذه المعادلة على المحاور الديكارتية نجد:

$$\begin{cases} \left(K^2 - \dfrac{\omega^2}{C^2}\right)E_x + i\omega^2\mu_0\gamma K E_y = 0 \\ i\omega^2\mu_0\gamma K E_x + \left(-K^2 + \dfrac{\omega^2}{C^2}\right)E_y = 0 \end{cases}$$

تملك هذه الجملة حلول غير معدومة إذا كان المحدد معدوم و بالتالي:

$$\begin{vmatrix} K^2 - \dfrac{\omega^2}{C^2} & i\omega^2\mu_0\gamma K \\ i\omega^2\mu_0\gamma K & \left(-K^2 + \dfrac{\omega^2}{C^2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

و بالتالي نجد:

$$K^2 - \frac{\omega^2}{C^2} = \pm\omega^2\mu_0\gamma K$$

الحلان (الإشارتين) معا تلخصان كمايلي:

$$\left(K_{\pm}{}^2 - \frac{\omega^2}{C^2}\right)\left(E_x \pm iE_y\right) = 0$$

لدينا إذا نوعان من الاستقطاب الأول يميني دائري (الحقل الكهربائي في نقطة معطاة يدور عكس عقارب الساعة و فرق الطور بين المركبتين هو $\dfrac{\Pi}{2}$ الدوران بالاتجاه المثلثي) و الثاني يساري دائري (الحقل الكهربائي في نقطة معطاة يدور مع عقارب الساعة و فرق الطور بين المركبتين هو $\dfrac{3\Pi}{2}$ الدوران عكس الاتجاه المثلثي) و عليه لدينا في حالة الاستقطاب اليميني و اليساري على التوالي:

$$\begin{cases} K_{+}{}^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2} + \omega^2\mu_0\gamma K_{+} \\ K_{-}{}^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2} - \omega^2\mu_0\gamma K_{-} \end{cases}$$

إن علاقة التبديد $K^2 - \dfrac{\omega^2}{C^2} = \pm\omega^2\mu_0\gamma K$ التي نعيد كتابتها كمايلي:

$$K_{\pm}{}^2 \mp \omega^2\mu_0\gamma K_{\pm} - \frac{\omega^2}{C^2} = 0$$

يكون حلها كمايلي باستعمال عبارة المميز:

$$K_{\pm}=\frac{1}{2}\left[\pm\gamma\mu_0\omega^2\pm\sqrt{\left(\gamma\mu_0\omega^2\right)^2+\frac{4\omega^2}{C^2}}\right]$$

و نختار الحل الموجب:

$$K_{\pm}=\frac{\omega}{C}\left[1+\left(\frac{\gamma\mu_0\omega C}{2}\right)^2\right]\pm\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}$$

يمكن الانتقال لنظام الوحدات CGS و ذلك بتعويض $\frac{\mu_0 C^2}{4\prod}=\frac{1}{4\prod\varepsilon_0}$ ب: 1 و بالتالي $\frac{\gamma\mu_0\omega C}{2}$ تعوض ب: $\frac{2\prod\gamma\omega}{C}$ التي هي بالفرض أقل بكثير من الواحد و منه يكون:

$$K_{\pm}\approx\frac{\omega}{C}\pm\frac{\gamma\mu_0\omega^2}{2}$$

و :

$$n_{\pm}=\frac{C}{\omega}K_{\pm}\approx 1\pm\frac{\gamma\mu_0\omega C}{2}$$

التمرين الثاني و العشرون:

بين أن الحقل الكهرومغناطيسي الناتج عن شحنة كهربائية q تتحرك بالسرعة $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم المخبر $\left(R\left(Oxyz\right)\right)$ وفق المحور(Ox) حيث أنها في اللحظة t=0 في مبدأ الإحداثيات. تعطي مركباتها كمايلي:

$$\begin{cases} E_x=\frac{q}{\Gamma}\gamma\left(x-vt\right), \\ E_y=\frac{q}{\Gamma}\gamma y, \\ E_z=\frac{q}{\Gamma}\gamma z, \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0,, \\ B_y = -\dfrac{q}{\Gamma}\beta\gamma z, \\ B_z = \dfrac{q}{\Gamma}\beta\gamma y, \end{cases}$$

حيث أن $\beta = \dfrac{v}{C}$ - $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ و Γ تأخذ الشكل:

$$\Gamma = \left[\gamma^2(x-vt)^2 + y^{23} + z^2\right]$$

2-توصل لنفس النتائج إنطلاقا من تحويلات Lorentz للكمون الرباعي.

الحل النموذجي:

نجد النتائج في الجملة CGS. لتكن $\left(R'\left(O'x'y'z'\right)\right)$ الجملة الذاتية للشحنة. أي أن الشحنة ساكنه فيها و بالتالي فهي تتحرك بالنسبة لمعلم المخبر $\left(R\left(Oxyz\right)\right)$ حركة مستقيمة منتظمة بالسرعة $\vec{v}$ وفق المحور(Ox). بما أن الشحنة ساكنة في جملتها الذاتية $\left(R'\left(O'x'y'z'\right)\right)$ فهي في أي نقطة من الفضاء تبعد بـ: $\vec{r}'$ عن مبدأ الجملة الذاتية تنتج حقل كهربائي $\vec{E}'(\vec{r}')$ غير معدوم و مجال مغناطيسي $\vec{B}'(\vec{r}')$ معدوم عبارتيهما الفيزيائية تكون بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \vec{E}'(\vec{r}') = \dfrac{q\vec{r}}{r'^3} \\ \vec{B}'(\vec{r}') = 0 \end{cases}$$

حيث $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. تحويلات Lorentz تعطي كمايلي:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta Ct) = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ Ct' = \gamma(Ct - \beta x) \end{cases}$$

و بالتالي $r' = \sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}$

التحويلات النسبية للحقل الكهرومغناطيسي:

$$\begin{cases} E_x = E_x' = \dfrac{qx'}{r'^3} = \dfrac{q}{\Gamma}\gamma(x-vt), \\ E_y = \gamma(E_y' + \beta B_z') = \dfrac{qy'}{r'^3} = \dfrac{q}{\Gamma}\gamma y, \\ E_z = \gamma(E_z' + \beta B_y') = \dfrac{qz'}{r'^3} = \dfrac{q}{\Gamma}\gamma z, \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = B'_x = 0, \\ B_y = \gamma(B_y' + \beta E_z') = -\dfrac{q}{\Gamma}\beta\gamma z, \\ B_z = \gamma(B_y' + \beta E_z') = \dfrac{q}{\Gamma}\beta\gamma y, \end{cases}$$

2-في الجملة الذاتية $\left(R'(O'x'y'z')\right)$ للشحنة تنتج حقل كهربائي $\vec{E}'(\vec{r}')$ غير معدوم و مجال مغناطيسي $\vec{B}'(\vec{r}')$ معدوم و بالتالي تكون مركبات الكمون الرباعي –نعتمد الآن الجملة الدولية في نظام الوحدات– فيها كمايلي:

$$V'(r') = \frac{q}{4\prod\varepsilon_0}\frac{1}{r'} = \frac{q}{4\prod\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{A}'(r') = 0 \Rightarrow \begin{cases} A'_x = 0 \\ A'_y = 0 \\ A'_z = 0 \end{cases}$$

و حسب تحويلات Lorentz للكمون الرباعي ينتج:

$$\begin{cases} A_x = \gamma\left(A_x' + \beta\dfrac{V'}{C}\right) = \dfrac{\gamma\beta V'}{C} \\ A_y = A_y' \\ A_z = A_z' \\ \dfrac{V}{C}_x = \gamma\left(\dfrac{V'}{C} + \beta A_x'\right) = \dfrac{\gamma V'}{C} \end{cases}$$

و بالتالي نجد:

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{\gamma\beta V'}{C} = \dfrac{\mu_0}{4\prod}\dfrac{\gamma q v}{\left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \\ V = \dfrac{\gamma q}{4\prod\varepsilon_0}\dfrac{1}{\left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

و باعتبار أن الحقل الكهربائي و المجال المغناطيسي بدلالة الكمون الرباعي:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \\ \qquad\qquad\qquad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Rightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \qquad\qquad\qquad B_z = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{cases}$$

و بعد عمليات حسابية بسيطة نتوصل للنتائج التالية:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\prod \varepsilon_0} \frac{q}{\Gamma} \gamma (x - vt), \\ E_y = \frac{1}{4\prod \varepsilon_0} \frac{q}{\Gamma} \gamma y, \\ E_z = \gamma \frac{1}{4\prod \varepsilon_0} \frac{q}{\Gamma} \gamma z, \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} B_x = 0, \\ B_y = -\frac{1}{4\prod \varepsilon_0} \frac{q}{\Gamma} \beta \gamma z \\ B_z = \frac{1}{4\prod \varepsilon_0} \frac{q}{\Gamma} \beta \gamma y, \end{cases} ,$$

التمرين الثالث و العشرون:

1-مقارنة كثافة تيار الإزاحة I_D و تيار وسط كيفي I.

قارن بين كثافة تيار الإزاحة $\vec{J}_D$ و تيار وسط ناقل $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ في نقطة من الوسط حيث تكون النفاذية المغناطيسية μ_0 و الناقلية γ التي نفرض أنها ثابتة. الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة في الوسط تواترها $\nu = 5(Mégahertz)$ في الحالات الثلاثة التالية:

-الوسط ناقل مثالي (ألمنيوم): $\gamma = 3{,}6.10^7\,\Omega^{-1}m^{-1}$ و النفاذية المغناطيسية $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\prod.10^9}SI$

- الوسط ناقل رديء (الأرض): $\gamma = 1{,}4.10^{-4}\,\Omega^{-1}m^{-1}$ و النفاذية المغناطيسية $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\prod.10^9}SI$

- الوسط عازل: $\gamma = 6{,}2.10^{-7}\,\Omega^{-1}m^{-1}$ و النفاذية المغناطيسية $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ حيث أن $\varepsilon_r = 28$

2-مقارنة كثافة تيار الإزاحة $\vec{J}_D$ و تيار وسط I في الفراغ بجوار كرة.

منبع الأمواج كروية من المركز (O) و نصف قطرة صغير جدا يبث بصورة متماثلة في كل الاتجاهات في الفراغ حيث النواة لذرة الهليوم شحنتها $+2e$.

-عبر عن الحقل الكهرومغناطيسي في النقطة M في اللحظة t

-قارن بين كثافة تيار الإزاحة $J_D(r,t)$ و بين تيار الوسط $\vec{J}(r,t)$ و أكتب معادلة Maxwell Ampère في النقطة M في اللحظة t

الحل النموذجي:

1- معادلة Maxwell Ampère في النقطة M في اللحظة t في الفراغ:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

يشمل نوعين من التيارات: الأول $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ (قانون Ohm) و الثاني تيار الإزاحة $\vec{J}_d = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ متغير بدلالة الحقل الكهربائي. من أجل حقل كهربائي محلي جيبي وحيد اللون $\omega = 2\prod\nu$ في التمثيل المركب المتناسب مع $e^{o\omega t+i\varphi}$ نعوض $\dfrac{\partial}{\partial t}$ بـ: $i\omega$ و بالتالي تكون عبارة تيار الإزاحة من الشكل:

$$\vec{J}_d = i\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

و بالتالي تكون النسبة بين التيارين كمايلي:

$$\frac{\vec{J}_d}{\vec{J}} = \frac{i\omega\varepsilon_0\vec{E}}{\gamma\vec{E}} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{\gamma} = \frac{i2\prod\nu\varepsilon_0}{\gamma} \Rightarrow \left|\frac{\vec{J}_d}{\vec{J}}\right| = 2\prod\varepsilon_0\frac{\nu}{\gamma}$$

-في حالة الوسط العازل نعوض ε_0 بـ: $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$

$$\left|\frac{\vec{J}_d}{\vec{J}}\right| = 2\prod\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\nu}{\gamma}$$

و فيمايلي الجدول الذي يلخص نتائج الحالات الثلاثة:

معادلة Maxwell Ampère	النتيجة	$\left\lvert\frac{\vec{J}_d}{\vec{J}}\right\rvert$	الوسط
$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\approx\mu_0\vec{J}$	$\lvert\vec{J}_d\rvert$ يهمل $\lvert\vec{J}_d\rvert \prec\prec \lvert\vec{J}\rvert$	$7,7.10^{-12}$	ناقل مثالي ألمنيوم: $\gamma=3,6.10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}$ و
$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$	التيارات من نفس الرتبة	2	الوسط ناقل رديء الأرض: $\gamma=1,4.10^{-4}\Omega^{-1}m^{-1}$ و
$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$	$\lvert\vec{J}\rvert$ يهمل $\lvert\vec{J}_d\rvert \succ\succ \lvert\vec{J}\rvert$	$1,2.10^{3}$	الوسط عازل $\gamma=6,2.10^{-7}\Omega^{-1}m^{-1}$ $\varepsilon_r=28$

2-الحقل الكهربائي $\vec{E}(M,t)$ قطري بمعنى أنه يتعلق بالبعد r فقط و بتطبيق نظرية Gauss:

$$\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow \oiint_{\substack{sphère..de\\ rayon...r}}\vec{E}d\vec{S}=\frac{q(r,t)}{\varepsilon_0}$$

و بالتالي تكون عبارة الحقل الكهربائي:

$$\vec{E}(r,t)=\frac{q(r,t)}{4\prod\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}$$

المجال المغناطيسي $\vec{B}(M,t)$ يحقق في كل نقطة من الفضاء العلاقة $\vec{\nabla}\vec{B}=0$ التي تعني إنحفاظ التدفق المغناطيسي عبر سطح مغلق و بالتالي نجد:

$$\vec{B}(r,t)=0$$

و بالتالي نجد شعاع تيار الإزاحة $\vec{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ كمايلي:

$$\vec{J}_d=\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}\frac{1}{4\prod\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

أما شعاع التيار $\vec{J}$ للجسيمات الصادرة من المنبع تحقق معادلة الاستمرارية: $\vec{\nabla}\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$. التيار المتدفق عبر السطح:

$$I = \iint \vec{J}(r,t) d\vec{S} \equiv \iiint \vec{\nabla}\vec{J}(r,t).d\tau = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}.d\tau = -\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}$$

و عليه نجد عبارة التيار $\vec{J}(r,t)$ كمايلي:

$$\vec{J} = -\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}\frac{1}{4\prod \varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

و بالتالي معادلة Maxwell Ampère تصبح: $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$$

التمرين الرابع و العشرون:

1-ليكن الكمون الشعاعي $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \exp\left[i\left(\vec{K}\vec{r} - \omega t\right)\right]$ و السلمي $V(\vec{r},t) = V_0 \exp\left[i\left(\vec{K}\vec{r} - \omega t\right)\right]$ حيث أن الشعاع الموجي $\vec{K}$ له ثلاث مركبات $\left(K_x, K_y, K_z\right)$ وفق المحاور الديكارتية بين أن:

$$\begin{cases} div\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = i\vec{K}\vec{A} \\ \overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i\vec{K} \wedge \vec{A} \\ \overrightarrow{grad}\,V = i\vec{K}V \end{cases}$$

2-ليكن r البعد عن مبد الإحداثيات. نعبر عن الكمون الشعاعي كمايلي:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\vec{A}_0}{r}\exp\left[i(kr - \omega t)\right] \\ k = \dfrac{\omega}{C} \end{cases}$$

حيث أن $\vec{A}_0$ شعاع ثابت.

1-بين أن الموجة الكهرومغناطيسية كروية متباعدة –تنتشر انطلاقا من مبدأ الإحداثيات في كل الاتجاهات بشكل إيزتروبي (متماثل المناحي)-

2-احسب المجال المغناطيسي

الحل النموذجي:

لدينا في جملة الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases} A_x = A_{0x}\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] \\ A_y = A_{0y}\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] \\ A_z = A_{0z}\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] \end{cases}$$

و من جهة أخرى:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial x} = iA_{0x}K_x\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] = iK_x A_x \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial y} = iA_{0y}K_y\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] = iK_y A_y \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = iA_{0z}K_z\exp\left[i\left(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t\right)\right] = iK_z A_z \end{cases}$$

و باعتبار أن:

$$\begin{cases} div\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} \\ div\vec{A} = iK_x A_x + iK_y A_y + iK_z A_z = i\vec{k}\vec{A} \end{cases}$$

في الحين نجد مركبات $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}$ وفق الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = i\left(K_y A_z - K_z A_y\right) \\ \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_y = \dfrac{\partial A_z}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial z} = i\left(K_x A_z - K_z A_x\right) \Rightarrow \overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = i\vec{K} \wedge \vec{A} \\ \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = i\left(K_x A_y - K_y A_x\right) \end{cases}$$

أما مركبات $\overrightarrow{grad}V$ فهي $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z}\right)$ وفق المحاور الديكارتية و بعد حساب بسيط نجد:

$$A_x = \frac{A_{0x}}{r}\exp[i(kr-\omega t)]$$
$$A_y = \frac{A_{0y}}{r}\exp[i(kr-\omega t)]$$
$$A_z = \frac{A_{0z}}{r}\exp[i(kr-\omega t)]$$

و:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = iK_x V \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = iK_y V \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = iK_z V \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z = i\vec{K}V$$

و لدينا أيضا:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = -i\omega V \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial t} = -i\omega A_x \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial t} = -i\omega A_y \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial t} = -i\omega A_z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}$$

2-من الواضح أن الكمون الشعاعي $\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\vec{A}_0}{r}\exp[i(kr-\omega t)]$ مركباته وفق الإحداثيات الديكارتية:

و بالتالي هي من الشكل $\dfrac{F(r-Ct)}{r}$ حيث أن $F(r-Ct)$ متناسبة مع $\exp[i(kr-\omega t)]$ و بالتالي فهي تمثل موجة كروية متباعدة (الموجة الكروية المتقاربة من الشكل $\dfrac{G(r+Ct)}{r}$ و هي تأتي من كل الاتجاهات نحو مبدأ الإحداثيات).

لتبسيط الحسابات الرياضية نوجه الشعاع $\vec{A}_0$ وفق المحور (Oz) و بالتالي تكون للكمون الشعاعي مركبة واحدة وفق هذا المحور و هي:

$$A_x = \frac{A_0}{r}\exp[i(kr-\omega t)]$$

بما أن المجال المغناطيسي $\vec{B} = \overrightarrow{Rot}\,\vec{A}$ فان مركباته تكون كمايلي:

$$\begin{cases} B_x = \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} = A_0\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{ik}{r^2}\right)(-y)\exp[i(kr-\omega t)] \\ B_y = \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_y = \dfrac{\partial A_z}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial z} = \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = A_0\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{ik}{r^2}\right)x\exp[i(kr-\omega t)] \\ B_z = \left(\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}\right)_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

و بشكل عام نجد عبارة المجال المغناطيسي:

$$\vec{B} = \left(\overleftarrow{A} \wedge \vec{r}\right)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)$$

التمرين الخامس و العشرون:

في الفراغ تعطى مركبات الحقل الكهربائي:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} \end{cases}$$

أحسب $div\vec{E}$ و $\overrightarrow{Rot}\vec{E}$. استنتج المجال المغناطيسي المرافق. قيم $div\vec{B}$ و $\overrightarrow{Rot}\vec{B}$ ماهي العلاقة التي يجب أن يحققها كل من الثابتين α و β.

الحل النموذجي:

لدينا:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

أما $\overrightarrow{Rot}\vec{E}$ فمركباتها وفق المحاور الديكارتية:

$$\begin{cases} \left(\vec{Rot}\,\vec{E}\right)_x = \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \left(\vec{Rot}\,\vec{E}\right)_y = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \beta E_z \\ \left(\vec{Rot}\,\vec{E}\right)_z = \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

و لدينا معادلة التحريض الكهرومغناطيسي $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ لحساب المجال المغناطيسي الذي له المركبة B_y غير معدومة:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\beta E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} \Rightarrow B_y = -\frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

أما $div\vec{B} = 0$. نحسب $\vec{Rot}\overline{B}$:

$$\begin{cases} \left(\vec{Rot}\,\vec{B}\right)_x = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \left(\vec{Rot}\,\vec{B}\right)_y = \dfrac{\partial B_z}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \\ \left(\vec{Rot}\,\vec{B}\right)_z = \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} \end{cases}$$

و من جهة أخري مركبة معادلة Maxwell Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ وفق المحور (Oz):

$$\begin{cases} \left(\vec{Rot}\,\vec{B}\right)_z = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \\ \left(\vec{Rot}\,\vec{B}\right)_z = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} \end{cases}$$

و بالتالي $\alpha^2 = \beta^2 C^2$ و في حالة الأمواج المستوية تكون $\alpha = i\omega$ و $\beta = ik$

—

المراجــع

Bibliographies

1-محاضرات الأستاذ معيرش عبد المجيد لمقياس: SEP220 السنة الثانية DES فيزياء من سنة 1993-2001.

2- محاضرات الأستاذ معيرش عبد المجيد لمقياس النسبية و الأمواج الكهرومغناطيسية السنة الثانية DES فيزياء 2001-2007.
3-ELECTRICITE 2 ((J. BOUTIGNY)) * VUIBERT* ISBN2-71177-4244 X * 1990*.
4-RELATIVITE RESTREINTE ET STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE ((C. GROSSTETE)) ellipses * ISBN 2-7298-8554-4 1985
5- Exercices Electricité 2 ((J. BOUTIGNY)) * VUIBERT* ISBN2-71177-4245 X * 1992*.
6- RELATIVITE Problèmes résolus ((HUBERT LUMBROSO)) * MCGRAW-HILL)) ISBN 2-7042-1016-0 1979.
7- Equation de Maxwell Ondes électromagnétique ((Michel Huilin-Nicole Hulin-Denise Perrin)) *DUNOD* ISBN 2-10-001657-1 1993.
8-PHYSIQE DES ONDES ((Catheine BOTET)) ellipses * ISBN 2-7298-4678-61996.
9-PROBLEMS AND SOLUTIONS ON ELECTROMAGNETISM, Zaho Shu-ping, You-han, Zhu Jun-Jie Edited by: Lim Yung-Kuo.

10-النسبية الخاصة مع تطبيقات نموذجية مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. **ردمك: 3-74- 948-9961-978 الطبعة الأولى: 2009**

11- الكهرباء و المغناطيسية في النظامين الساكن و الديناميكي مع أمثلة نموذجية مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. ديوان المطبوعات الجامعية **ردمك: 987.9961.0.1760.9 الطبعة الأولى: 2014**

12- مدخل للنظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل في الفراغ) مطبوعة من إعداد الاستاذ:معيرش عبدالمجيد. ديوان المطبوعات الجامعية **ردمك: 987.9961.0.1486.8 الطبعة الأولى: 2011**