السلسلة الأولى: صياغة مسائل البرمجة الخطية

تمرين الأول:

الدالة هي دالة تعظيم: $Max Z = 6x_1 + 5x_2$

حيث: x_1: يمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى.

x_2: يمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

$$0,25x_1 + 0,17x_2 \leq 175$$
$$x_1 + 1,5x_2 \leq 900$$
$$x_2 \leq 400$$
$$x_1 \geq 500$$
$$x_2 \leq 0$$

تمرين الثاني:

الدالة هي دالة ضغط (تقليل): $Min Z = 10x_1 + 15x_2$

x_1: الكمية المشتراة من المادة M_1.

x_2: الكمية المشتراة من المادة M_2.

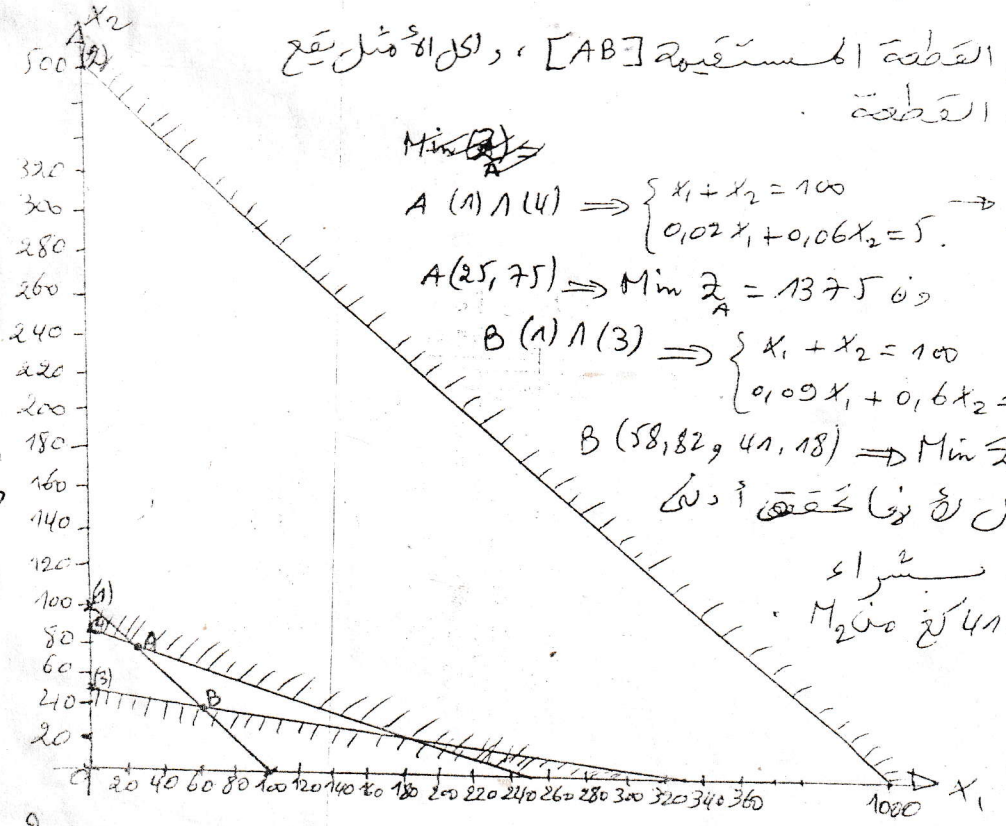
$$x_1 + x_2 = 100$$
$$0,001x_1 + 0,002x_2 \leq 1$$
$$0,09x_1 + 0,6x_2 \geq 30$$
$$0,02x_1 + 0,06x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(1): $x_1 + x_2 = 100$ ⟶ $\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 100 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 100 \end{cases}$

(2): $0,001x_1 + 0,002x_2 = 1$ ⟶ $\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 500 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1000 \end{cases}$

(3): $0,09x_1 + 0,6x_2 = 30$ ⟶ $\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 50 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 333,33 \end{cases}$

(4): $0,02x_1 + 0,06x_2 = 5$ ⟶ $\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 83,33 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 250 \end{cases}$



منطقة الحلول الممكنة هي القطعة المستقيمة [AB]، والحل الأمثل يقع على أحد طرفي هذه القطعة.

~~Min (Z)~~

A (1) ∧ (4) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 0,02x_1 + 0,06x_2 = 5 \end{cases}$ ⟶ $\begin{matrix} x_2 = 75 \\ x_1 = 25 \end{matrix}$

$A(25, 75) \Rightarrow Min\ Z_A = 1375$ دج

B (1) ∧ (3) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 0,09x_1 + 0,6x_2 = 30 \end{cases}$ ⟶ $\begin{matrix} x_2 = 41,18 \\ x_1 = 58,82 \end{matrix}$

$B(58,82, 41,18) \Rightarrow Min\ Z_B = 1205,9$ دج

النقطة B تمثل الحل الأمثل لأنها تحقق أدنى تكلفة ممكنة وذلك بشراء 58,82 كغ من M_1 و 41,18 كغ من M_2.

التمرين الثالث :

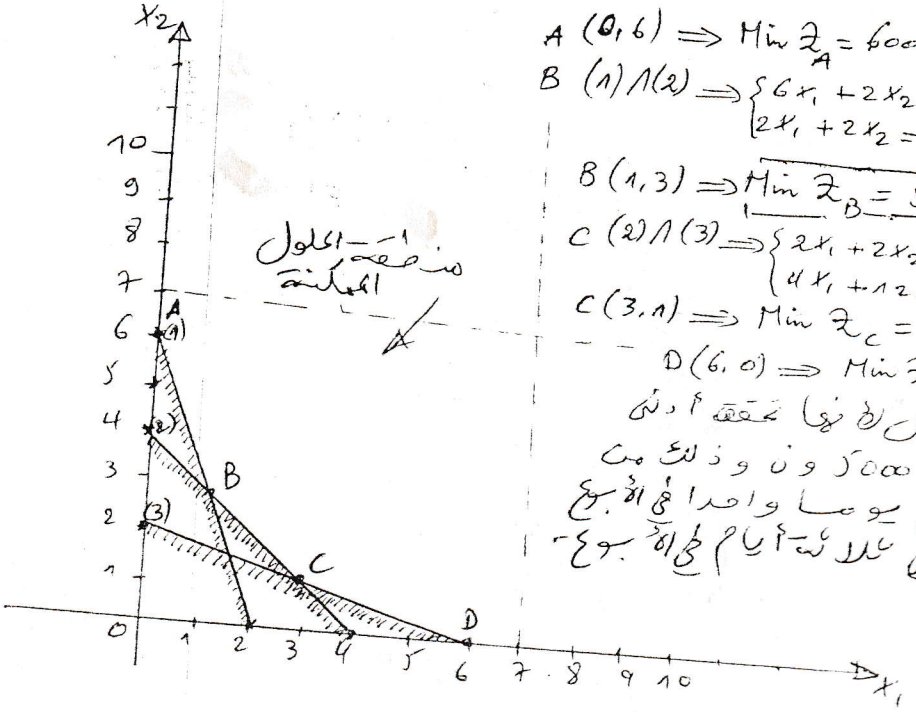
$\text{Min } Z = 2000x_1 + 1000x_2$: دالة تقليل تكاليف

الدالة هي دالة تقليل تكاليف

x_1 : عدد الأيام التي يجب أن يعمل فيها المنجم 1 لإنتاج طن واحد من الخام.

x_2 : عدد الأيام التي يجب أن يعمل فيها المنجم 2 لإنتاج طن واحد من الخام.

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \rightarrow (0,6), (2,0) \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \rightarrow (0,4), (4,0) \\ 4x_1 + 12x_2 = 24 \rightarrow (0,2), (6,0) \end{cases}$$



$A(0,6) \Rightarrow \text{Min } Z_A = 6000$ ون

$B = (1) \cap (2) \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$B(1,3) \Rightarrow \text{Min } Z_B = 5000$ ون

$C = (2) \cap (3) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 8 \\ 4x_1 + 12x_2 = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$C(3,1) \Rightarrow \text{Min } Z_C = 7000$ ون

$D(6,0) \Rightarrow \text{Min } Z_D = 12000$ ون

النقطة B تمثل الحل الذي يمثل لنا تكلفة أدنى تكلفة لهذين المنجمين قدرها 5000 ون وذلك من خلال عمل المنجم الأول بمدة واحدة أي أسبوع واحد وعمل المنجم الثاني ثلاثة أيام في الأسبوع.

التمرين الرابع :

$\text{Max } Z = 200x_1 + 300x_2$: دالة تعظيم

الدالة هي دالة تعظيم

x_1 : عدد المبردات الواجب إنتاجها أسبوعيا.

x_2 : عدد أجزاء التكييف الواجب إنتاجها أسبوعيا.

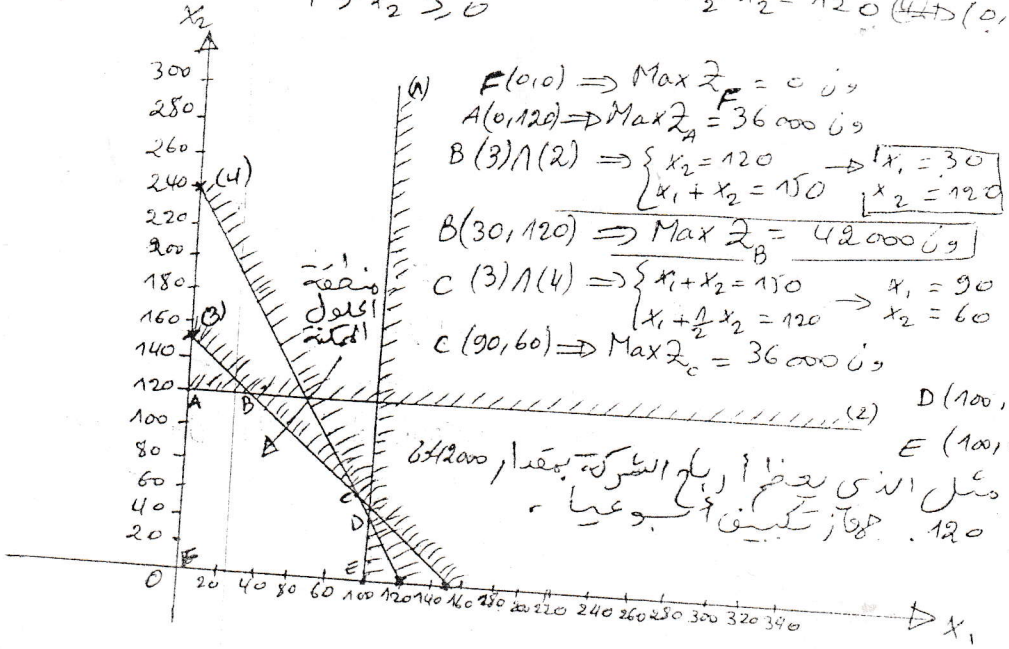
$x_1 \leq 100 \rightarrow x_1 = 100$ (1)

$x_2 \leq 120 \rightarrow x_2 = 120$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 150 \rightarrow x_1 + x_2 = 150$ (3) $\rightarrow (0,150), (150,0)$

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 120 \rightarrow x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 120$ (4) $\rightarrow (0,240), (120,0)$

$x_1, x_2 \geq 0$



$F(0,0) \Rightarrow \text{Max } Z_F = 0$ ون

$A(0,120) \Rightarrow \text{Max } Z_A = 36000$ ون

$B = (3) \cap (2) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 120 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 120 \end{cases}$

$B(30,120) \Rightarrow \text{Max } Z_B = 42000$ ون

$C = (3) \cap (4) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 150 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90 \\ x_2 = 60 \end{cases}$

$C(90,60) \Rightarrow \text{Max } Z_C = 36000$ ون

$D(100,40) \Rightarrow \text{Max } Z_D = 32000$ ون

$E(100,0) \Rightarrow \text{Max } Z_E = 20000$ ون

النقطة B تمثل الحل الذي يعظم أرباح الشركة بمقدار 42000 ون وبإنتاج 30 مبردا و 120 جهاز تكييف أسبوعيا.

تمرين الخامس:

الدالة هي دالة تقليل (تقليل الطاقة (S) العاطلة ((S)) :

$\text{Min } Z = S_1 + S_2 + S_3$

S_1 : الطاقة العاطلة في المرحلة الأولى.

S_2 : الطاقة العاطلة في المرحلة الثانية.

S_3 : الطاقة العاطلة في المرحلة الثالثة.

x_1 : الكمية المنتجة من النوع A.

x_2 : الكمية المنتجة من النوع B.

8 ساعات = 480 دقيقة.

(1)
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 480 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 480 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + S_1 = 480 \Rightarrow S_1 = 480 - 6x_1 - 4x_2 \\ 5x_1 + 5x_2 + S_2 = 480 \Rightarrow S_2 = 480 - 5x_1 - 5x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 + S_3 = 480 \Rightarrow S_3 = 480 - 4x_1 - 6x_2 \end{cases}$$ (1)

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

بالتعويض بقيم S في Z نجد:

$\text{Min } Z = (480 - 6x_1 - 4x_2) + (480 - 5x_1 - 5x_2) + (480 - 4x_1 - 6x_2)$

(2) $\boxed{\text{Min } Z = 1440 - 15x_1 - 15x_2}$.

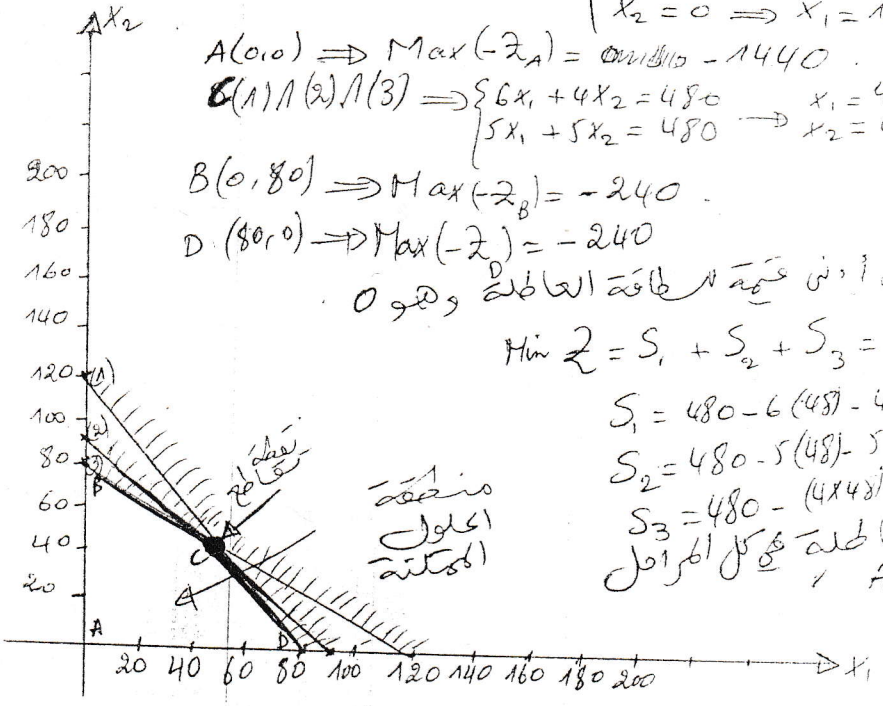
أو $\text{Max}(-Z) = 15x_1 + 15x_2 - 1440$

الحل بيانيا:

$6x_1 + 4x_2 = 480 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 120 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 80 \end{cases}$ (1)

$5x_1 + 5x_2 = 480 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 96 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 96 \end{cases}$ (1)

$4x_1 + 6x_2 = 480 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 80 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 120 \end{cases}$ (1)



(1)

$A(0,0) \Rightarrow \text{Max}(-Z_A) = 0 - 1440$.

$C(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 480 \\ 5x_1 + 5x_2 = 480 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 48 \\ x_2 = 48 \end{matrix}$, $C(48,48) \Rightarrow \text{Max}(-Z_C) = 0$

$Z = 0$

$B(0,80) \Rightarrow \text{Max}(-Z_B) = -240$.

$D(80,0) \Rightarrow \text{Max}(-Z_D) = -240$

(2)

C تمثل الحل المثلى الذي يحقق أدنى قيمة لطاقة العاطلة وهو 0.

$\text{Min } Z = S_1 + S_2 + S_3 = 0$.

$S_1 = 480 - 6(48) - 4(48) = 0$

$S_2 = 480 - 5(48) - 5(48) = 0$

$S_3 = 480 - (4 \times 48) - 6(48) = 0$

تحقق أدنى قيمة لطاقة العاطلة في كل المراحل، نتاج 48 وحدة من النوع A، و 48 وحدة من النوع B.

$\text{Min } Z = S_1 + S_2 + S_3 = 0$

$\text{Max}(-Z) = 15(48) + 15(48) - 1440 = 0$.