

Différentiabilité

Remarque 1 ★★☆☆

L'exercice noté par (★) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Exercice 1 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- Démontrer que la fonction f est continue en $(0, 0)$.
- Démontrer que la fonction f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ au point $(0, 0)$.

Exercice 2 ★★☆☆

Dans chaque cas, calculer toutes les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$ $f(x, y) = y \cos(e^{xy+3y})$. | <ol style="list-style-type: none"> $f(x, y, z) = x \sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$. |
|--|--|

Exercice 3 ★★☆☆

- Calculer la dérivée directionnelle de la fonction: $f(x, y) = 3x^2y - 4xy$, au point $(1, 2)$, le long la direction $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- Vérifier l'égalité $D_v f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \cdot v_2$.

Exercice 4 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$. Calculer la dérivée directionnelle au point $(1, 1, 1)$ selon la direction des vecteurs suivantes

- $\vec{v} = (2, 1, 3)$
- $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Exercice 5 ★★☆☆

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par: $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

- Établir que la fonction f est continue en tout point de \mathbb{R}^2 .
- Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 tel que $y \neq 0$ et en $(0, 0)$.
- Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6 ★★☆☆

Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué:

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x, y) = xy - 3x^2$, en $(1, 2)$. | 3. $f(x, y) = y\sqrt{x}$, en $(4, 1)$, (★). |
| 2. $f(x, y) = xy - 2y^2$, en $(-2, 3)$. (★) | |

Exercice 7 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- | | |
|---|---|
| 1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? | 3. f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$? |
| 2. Calculer $\nabla f(x, y)$. | 4. Est ce que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 ? |

Exercice 8 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles en point $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières en $(0, 0)$.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0, 0)$.
4. Est ce que f est différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 9 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.
Vérifier que f est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 10 ★★☆☆

Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2, 5) = 6, \quad \partial_x f(2, 5) = 1, \quad \text{et} \quad \partial_y f(2, 5) = -1,$$

donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Exercice 11 ★★☆☆

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par: $f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 (★).
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.

4. Que peut-on déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

Exercice 12 ★★☆☆

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \tag{1}$$

- Vérifier que l'équation (1) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
- Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
- En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

Exercice 13 ★★☆☆

Donner le développement limité de d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions suivantes

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$. | 3. $f(x, y) = e^{\cos(x+y)}$, (★). |
| 2. $f(x, y) = \frac{e^x}{2+y}$. | 4. $f(x, y) = e^y \cos x$, (★). |
| | 5. $f(x, y) = \frac{2+x+y}{1+x-y}$. |

Exercice supplémentaire 1 ★★☆☆

On considère la courbe plane d'équation

$$2x^3y + 2x^2 + y^2 = 0. \tag{2}$$

- Vérifier que l'équation (2) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, 1)$.
- Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(1, \varphi(1))$.
- Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 1 centré en 1.

Exercice supplémentaire 2 ★★☆☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u, v) = u + v, \text{ où } u(x, y) = e^{x+y} \text{ et } v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f .