Chapitre 1

Introduction.

L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes de mathématiques issus de la modélisation des problèmes réels et dont on cherche à calculer la solution à l'aide d'un ordinateur, i. e. à trouver ou à donner des valeurs approchées de la solution exacte avec une certaine précision.

Le but de ce cours, est donc, de fournir les principes de base des méthodes numériques les plus utilisées.

1.1 Erreur absolue - Erreur relative.

Définition 1.1.1 *L'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre des problèmes de mathématiques continues.*

Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre numériquement à des questions à variable réelle ou complexe, comme l'analyse linéaire numérique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la recherche de solutions numériques d'équations différentielles et d'autres problèmes liés aux sciences physiques et téchnologiques.

Définition 1.1.2 *Un* ***algorithne*** *est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données, pour arriver en un nombre fini d'étapes (dont la quantité, ou réciproquement le temps d'exécution est défini par le terme* ***coût****), à un certain résultat et cela indépendamment du type des données.*

Les algorithmes sont intégrés dans des calculateurs par l'intermédiaire des programmes.

Définition 1.1.3 *Un programme est la réalisation d'un algorithme au moyen d'un language machine donné.*

Soient x une quantité exacte et x^* une valeur approché de x.
- Si $x^* > x$, x^* est dite valeur approchée de x par excés.
- Si $x^* < x$, x^* est dite valeur approchée de x par défaut.

Définition 1.1.4 *On appelle erreur absolue de x^* sur x la valeur notée par E et donnée par*

$$E = |x - x^*| .$$

Définition 1.1.5 *On appelle erreur relative de x^* sur x la valeur notée par E_r et donnée par* $E_r = \dfrac{|x - x^*|}{|x|} = \dfrac{E}{|x|}$.

Dans la majorité des cas, l'erreue absolue et relative sont inconuues, alors pour les estimer on introduit la notion du majorant de l'erreur.

Définition 1.1.6 *On appelle majorant de l'erreur absolue d'une valeur approchée x^*, tout réel Δx vérifiant*

$$E = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x.$$

Remarque 1.1.7 1− *On prend on pratique le plus petit Δx possible.*
2− *Δx est appelé par abus de language erreur absolue de x^* sur x et on écrit dans ce cas : $x = x^* \pm \Delta x$ ou encore $x \simeq x^* \left(\pm \Delta x\right)$.*
3− *L'erreur relative est souvent donnée en pourcentage*

Définition 1.1.8 *On appelle majorant de l'erreur relative d'une valeur approchée x^* la quantité δx donnée par*

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|},$$

appelé par un abus de language erreur relative.

1.2 Représentation décimale des réels.

Tous réel strictement positif x peut prendre la forme suivante

$$x = a_m.10^m + a_{m-1}.10^{m-1} + \cdots a_0.10^0 + a_{-1}.10^{-1} + \cdots a_{-i}.10^{-i} + \cdots$$

où $a_m \neq 0$ et les $a_i \in \{0.1.\cdots,9\}$ et ils sont appelés **chiffres significatifs** (c.s.) du réel x.

Définition 1.2.1 *Si l'erreur absolue vérifie*

$$\Delta x \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

alors le chiffre correspondant à la $n^{ième}$puissance de 10^{-1} est dit ***significatif exact****, noté c.s.e., ainsi que tous ceux avant lui. Dans ce cas on dit que x^* est une valeur approchée de x avec n chiffres significatifs exacts aprés la virgule et au total $(m+1+n)$ c.s.e.*

Exemple 1.2.2 *On obtient une approximation de π au moyen de la quantité* $\dfrac{22}{7} = 3.142875...$ *, on en conclut que*

$$\Delta x = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.00126... \simeq 0.126 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-2},$$

donc le chiffre des centième est significatif et on a en tous 3 chiffres significatifs (3.14).

Introduction Générale

Les méthodes numériques sont des techniques d'approximation de procédures mathématiques. Des approximations sont nécessaires car nous ne pouvons pas non plus résoudre la procédure analytiquement. La plupart des problèmes mathématiques qui se posent en sciences et en génie sont très difficiles et parfois impossible à résoudre exactement. Ainsi, une approximation d'un problème mathématique difficile est très importante pour le rendre plus facile à résoudre. En raison de l'immense développement de la technologie informatique, l'approximation numérique est devenue plus populaire et un outil moderne pour les scientifiques et les ingénieurs.

Les deux objectifs principaux de l'analyse numérique sont, d'une part, de pouvoir résoudre numériquement des problèmes concrets dont on connaît ou pas la solution analytique et d'autre part, d'analyser le comportement des méthodes utilisées (la rapidité de convergence vers la solution approchée et la précision par rapport aux erreurs inhérentes au calcul numérique).

Ce polycopié est rédigé pour les étudiants de deuxième année universitaire d'une Licence des Sciences et Techniques. Il constitue un manuel de cours et d'exercices corrigés recouvre le programme d'analyse numérique.

Ce polycopié est structuré en six chapitres comme suit :

Le premier chapitre mis en lumière les diverses techniques de résolution numérique des équations non linéaire (la méthode de bissection, point fixe et Newton).

Dans le deuxième chapitre, le problème de l'interpolation polynomiale est traité par la méthode de Lagrange et la méthode de Newton.

Les techniques d'intégration numérique sont présentées dans le troisième chapitre qui se divise en deux parties: simple et composée. Les méthodes proposées sont: méthode des rectangles, du trapèze et celle de Simpson.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Deux méthodes sont présentées à savoir, la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta.

L'analyse numérique matricielle occupe les derniers chapitres (5 et 6). On présente tout d'abord les techniques de résolution des systèmes linéaires par les trois grandes catégories de méthodes classiques, à savoir les méthodes directes (méthode de Gauss, factorisation LU et factorisation de Choleski), et les méthodes itératives (méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel, de relaxation).

A la fin de chaque chapitre nous avons proposé des exercices avec quelques corrigés.

Une liste de références bibliographiques est donnée à la fin de ce manuscrit.

Méthodes de résolution des équations non linéaires

1.1 Introduction

L'un des problèmes en mathématiques appliquées est de calculer les zéros d'une fonction *f* (c'est-à-dire trouver les racines d'une équation *f(x)=0)*. Dans certains cas bien particuliers, comme pour les équations algébriques polynomiales à faible degré: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 x + a_0 = 0$, le problème est simple car il existe pour ces fonctions des formules qui donnent les zéros explicitement. Toutefois, pour la plupart des fonctions *f* (les polynômes de degré supérieur à 4 ou les équations transcendantes qui comprennent trigonométriques, exponentielles et logarithmiques : $a_n \ln(x) + b_n e^x + c_n \cos(x) + ... = 0$), il n'est pas possible de résoudre l'équation *f(x)=0* explicitement et il faut recourir à des méthodes numériques. Celles-ci se sont avérées très efficaces et très utilisées dans la pratique. Elles permettent de calculer les zéros de *f* par approximations successives avec la précision désirée.

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs techniques de résolution des équations non linéaires. Ces méthodes se distinguent par leurs principes et leurs vitesses de convergence. Les méthodes proposées sont : méthode de la bissection, point fixe et Newton-Raphson.

1.2. Séparation des racines

Soit *f(x)* une fonction définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$. On cherche à approcher numériquement les racines simples de l'équation : $f(x) = 0$.

La première étape consiste à séparer les racines, c'est à dire déterminer un intervalle fermé et borné $[a,b]$ dans lequel f admet une et une seule racine.

Pour trouver cet intervalle on peut :

_ Soit utiliser la méthode graphique : étudier les variations de *f*, tracer la courbe et situer la solution d'où le choix de $[a,b]$.

_ Soit utiliser la méthode algébrique : en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$.

–Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel $\alpha \in]a,b[$ tel que *f(α)=0.*

–Si de plus *f(x)* est monotone sur l'intervalle $[a,b]$, alors la solution α est unique.

1.3 Méthodes numériques

1.3.1 Méthode de la Bissection (Dichotomie)

La méthode de bissection est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,b]$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

1) $f(a).f(b) < 0$, alors f possède au moins une racine α sur l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(\alpha)=0$.

2) f est monotone sur l'intervalle $[a,b]$, alors la racine α est unique sur $[a,b]$.

1.3.1.1 Principe de la méthode

Cette méthode qui permet de déterminer la racine de la fonction $f(x)$ se base sur les éliminations successives des domaines en suivant les étapes données ci-dessous :

1/ On divise l'intervalle $[a,b]$ en deux parties égales $[a,x_0]$ et $[x_0,b]$ avec $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

2/ On garde l'intervalle vérifiant la condition d'existence de racine, c'est-à-dire :

Si $f(a).f(x_0) < 0$ le nouvel intervalle soit $[a,b] = [a,x_0]$ sinon $[a,b] = [x_0,b]$.

3/ On répète les étapes 1/ et 2/ jusqu'à ce que $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$ avec ε un nombre positif très petit (précision de convergence).

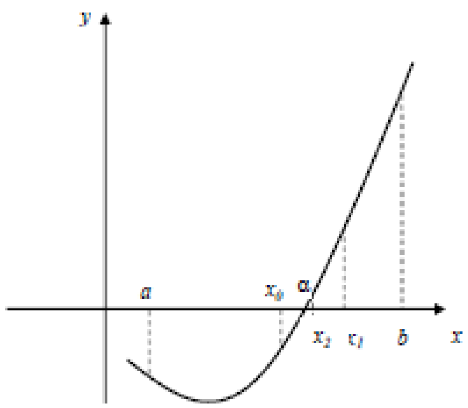

Figure 1 : Principe de la méthode de Dichotomie.

1.3.1.2 Convergence et estimation de l'erreur

Pour montrer que la méthode de Bissection est convergente vers la solution unique de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $[a,b]$, il faut que :

L'estimation de l'erreur : $|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

Cette relation permet de calculer le nombre max d'itérations nécessaires :

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log 2} - 1$$

Exemple :

Calculer la racine au millième près de l'équation $f(x) = x^3 + 4x - 2 = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$.

Solution

La fonction est un polynôme donc continue sur l'intervalle $[0,1]$.

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0).f(1) < 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine $\alpha \in]0,1[$ tel que *f(α)=0*.

De plus, $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0, \forall x \in [0,1]$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ (*f* est monotone).

On déduit que la racine de *f* est unique.

Alors, on peut appliquer la méthode de bissection sur cet intervalle.

Pour calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$, on utilise la formule suivante: $n \geq \frac{\log(b-a) - \log 2\varepsilon}{\log 2}$

On obtient :

$$n \geq \frac{\log(1) - \log 2.10^{-3}}{\log 2} \Rightarrow n \geq \frac{-\log 2.10^{-3}}{\log 2} = 8.96578 \quad \text{D'où} \quad n=9$$

Il faut effectuer 9 itérations pour avoir la racine approchée avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$.

Application de la méthode de Dichotomie :

i	a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	*0*	*0.5*	*1*	-	+	+	/
1	*0*	*0.25*	*0.5*	-	-	+	*0.25*
2	*0.25*	*0.375*	*0.5*	-	-	+	*0.125*
3	*0.375*	*0.4375*	*0.5*	-	-	+	*0.0625*
4	*0.4375*	*0.4687*	*0.5*	-	-	+	*0.0312*
5	0.4687	0.4843	0.5	-	+	+	0.0156
6	0.4687	0.4765	0.4843	-	+	+	0.0078
7	0.4687	0.4726	0.4765	-	-	+	0.0039
8	0.4726	0.4745	0.4765	-	+	+	0.0019
9	0.4726	0.4735	0.4745				0.0009

On arrête les calculs jusqu'à ce que $|x_9 - x_8| = 0.0009 \leq \varepsilon = 0.001$

Alors la racine approchée est :

$$\alpha \approx 0.4735$$

1.3.2 Méthode du Point fixe (Approximations successives)

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ et possède une racine $\alpha \in [a,b]$. La méthode du point fixe permet de passer de la recherche de la racine de $f(x) = 0$ sur $[a,b]$ à la recherche du point fixe de la fonction $g(x)$ tel que $x = g(x)$.

En effet, les deux problèmes sont équivalents ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$).

1.3.2.1 *Principe de la méthode*

On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente $x = g(x)$ où g est continue, et on construit la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = g(x_{n-1}) \end{cases}$$

Cette suite converge vers la solution α point fixe de *g(x)* et solution de l'équation $f(x) = 0$.

1.3.2.2 *Conditions de convergence et estimation de l'erreur*

Soit *g(x)* une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ telle que :

1/ $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$ (condition de stabilité).

2/ $\exists k \in IR,\ 0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leq k < 1,\ k = \underset{[a,b]}{Max}|g'(x)|$ (condition de contraction stricte).

Alors g(x) admet un point fixe unique dans $I = [a,b]$ et la suite récurrente : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_n = g(x_{n-1}) \end{cases}$ converge vers le point fixe α.

Et on a l'estimation de l'erreur suivante: $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$

Cette relation permet de calculer le nombre d'itérations nécessaires à l'approximation de α :

$$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

Donc

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{(1-k)\,\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(k)}, \; k = \underset{[a,b]}{Max}|g'(x)|$$

1.3.2.3 Interprétation géométrique

Chercher α tel que *g(α)=(α)* revient à chercher l'intersection du graphe de *g* (*y=g(x)*) avec la droite $y = x$, c'est à dire à trouver le point fixe de *g*.

On voit clairement que la pente de la courbe *y=g(x)* dans le voisinage de la racine α est faible c'est-à-dire $|g'(x)| \leq 1$et on converge vers la solution unique α.

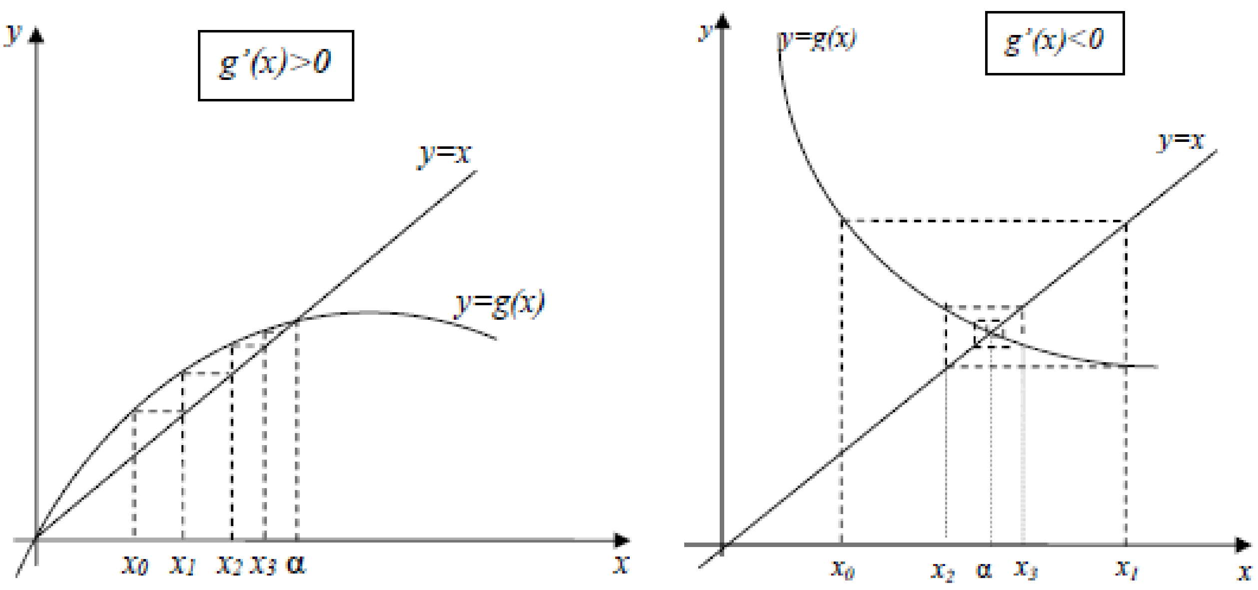

Figure 2 : Interprétation géométrique de la méthode du point fixe.

Exemple :

Calculer la racine approchée de l'équation $f(x) = x^3 + 4x - 2$ qui appartient à $[0,1]$avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$.

Solution **:**

On écrit l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ et on vérifie les conditions de convergence. On peut écrire :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{x^2 + 4} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$$

Maintenant, on vérifie les conditions de convergence pour cette méthode.

Il faut prouver les deux points suivants :

a) Stabilité : $g[0,1] \subset [0,1]$?

La fonction *g(x)* est définie et continue sur $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0.5 \in [0,1] \\ g(1) = 0.4 \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ g[0,1] \subset [0,1]$$

b) $|g'(x)| \le k < 1,\ \forall x \in [0,1]$?

On a : $g'(x) = \dfrac{-4x}{(4+x^2)} \le 0\ ,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow k = \underset{[0,1]}{Max}|g'(x)| = |g'(1)| = \dfrac{4}{25} < 1$

$\Rightarrow |g'(x)| < 1,\ \forall x \in [0,1]$

Les conditions *a)* et b) sont vérifiés donc la méthode du point fixe converge vers la solution sur l'intervalle $[0,1]$.

Calcul la racine approchée : $\varepsilon = 10^{-3}$, $x_0 = 0.5$

i	x_i	$g(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	0.5	0.47058	/
1	0.47058	0.47377	0.02941
2	0.47377	0.47343	0.00319
3	0.47343	0.47346	0.00034

On arrète les calculs jusqu'à ce que $|x_3 - x_2| = 0.00034 \le \varepsilon = 0.001$

Alors la racine approchée est :

$$\alpha \approx 0.47343$$

1.3.3 Méthode de Newton-Raphson (Tangentes)

1.3.3.1 Principe de la méthode

Cette méthode repose sur le théorème de Taylor (dévelppement de Taylor d'une fonction au premier ordre). Soit la racine α de l'équation *f(x)=0* séparée sur $[a,b]$. Si *f(x)* est continue et continument dérivable dans le voisinage de α solution de *f(x)=0*, alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé x_n proche de α s'écrit :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(\alpha - x_n)^2$$

Et comme $f(\alpha)=0$, en supposant que $f'(x_n)\neq 0$ et gardant seulement les dérivées du 1^er^ ordre on aura :

$$f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Alors la formule de récurrence de Newton est donnée par :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\ldots$$

Cette suite, si elle converge, elle doit converger vers la solution α de *f(x)=0*.

1.3.3.2 Conditions de convergence et estimation de l'erreur :

Théorème de Newton :

Soit *f(x)* une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$, telle que :

1) $f(a).f(b)<0$

2) $f'(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$

3) $f''(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$

f'(x) et $f''(x)$ sont non nulles et gardent des signes constants sur l'intervalle $[a,b]$.

Alors pour un choix de x_0 : $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0).f''(x_0)>0$, la suite de Newton-Raphson:

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\ldots$ converge vers l'unique solution de *f(x)=0*.

Et on a l'estimation d'erreurs suivante :

$$|x_n-\alpha|\leq\frac{M}{2m}|x_{n-1}-\alpha|^2 \quad ,\ \forall n>0$$

Avec $$M=\underset{x\in[a,b]}{Max}|f''(x)|,\ m=\underset{x\in[a,b]}{Min}|f''(x)|$$

1.3.3.3 Interprétation géométrique:

L'idée est de remplacer d'un petit arc de la courbe $y=f(x)$ par sa tangente menée par un certains points de cette courbe.

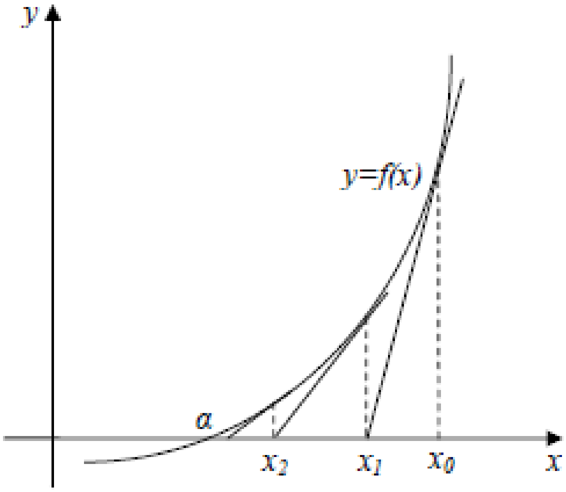

Figure 3 : Interprétation géométrique de la méthode de Newton

A partir d'un point x_0 bien choisi dans $[a,b]$, x_1 est l'abscisse du point d'intersection de la tangente de graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses. D'où :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ (si\ f'(x) \neq 0).$$

En répétant le processus sur x_1 on obtient un point x_2, et ainsi de suite.

Les points $(x_n)_{n \in IN}$ vérifient donc la relation de récurrence : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,2,\ldots$

C'est la formule de Newton-Raphson la plus utilisée dans la recherche des racines.

Exemple :

Trouver l'approximation de la valeur $\sqrt{10}$ par la méthode de Newton à une précision $\varepsilon = 10^{-5}$ près.

Solution :

On considère la fonction f qui possède $\sqrt{10}$ comme une solution définie par :

$$f(x) = x^2 - 10$$

$f(\sqrt{10}) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{10} = 0$ car $x = \sqrt{10}$

On cherche à trouver l'intervalle $[a,b]$:

La racine carrée de 10 est d'environ trois, donc on peut utiliser l'intervalle [3, 4].

On a : $a < \sqrt{10} < b \Rightarrow 3 < 3.162277 < 4$

Vérifions maintenant les conditions du théorème de Newton sur l'intervalle [3, 4]:

1/ $f(x) = x^2 - 10$ est de classe C^2 sur l'intervalle [3, 4],

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=-1 \\ f(4)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3).f(4)<0$$

2/ $f'(x)=2x>0, \quad \forall x \in [3,4], f'(x)>0$

3/ $f''(x)=2, \quad \forall x \in [3,4], f''(x)>0$

La fonction *f* vérifie les conditions de convergence.

Le choix de x_0 :

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=6 \\ f''(4)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(4).f''(4)>0$$

Alors :

La suite de Newton-Raphson : $\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \dfrac{x_i^2-10}{2x_i} \end{cases}$ converge vers la solution α.

Calcul de la solution approximative :

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	4	6	8	0.75
1	3.25	0.5625	6.5	0.086538
2	3.163462	0.007491	6,326924	0,001183
3	3.162279	0.000008	6,324558	0.000001
4	3.162278			

On arrête les calculs jusqu'à ce que $|x_4 - x_3| = 0.000001 < \varepsilon = 0.00001$

Alors la solution approchée obtenue par la méthode de Newton est :

$$\alpha \approx 3.162278$$