Interpolation polynomiale

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on dispose d'une fonction f connue uniquement par ses valeurs en certains points, et on cherche à approcher f par une fonction polynôme. Le problème de l'interpolation polynomiale consiste à trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe passe par les $n + 1$ points donnés.

Supposons par exemple que nous connaissons les valeurs d'une fonction f en un nombre fini de points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ selon le tableau suivant :

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

Pour estimer la valeur de f en un point quelconque $x \in IR$, on peut construire un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$P(x_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 0,1,2,\ldots n \text{ et utiliser l'approximation } P(x) = f(x).$$

C'est ce qu'on appelle *Interpolation polynomiale* : interpolation de la fonction f par le polynôme $P_n(x)$ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont appelés points d'interpolation *(nœuds)*.

2.2 Méthodes Numériques

2.2.1 Interpolation de Lagrange

2.2.1.1 Théorème et définition

Soient $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ et et f une fonction dont les valeurs sont $f(x_0), f(x_1), \ldots \ldots, f(x_n)$, il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x_i) = P_n(x_i) \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots.n$$

Le polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots. + f(x_n)L_n(x)$$

$$\text{avec } y_i = f(x_i)$$

Où

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Le polynôme P_n est appelé *polynôme d'interpolation de Lagrange* de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés *coefficients polynômes de Lagrange.*

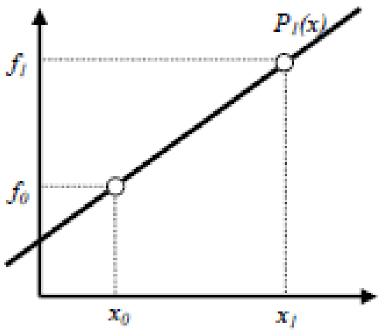
2.2.1.2 Quelques exemples simples

- ***Polynôme de degré 1 (n = 1) :***

Le polynôme de Lagrange, passant par 2 points, est une droite.

$$P_1(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x)$$

$$= f_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

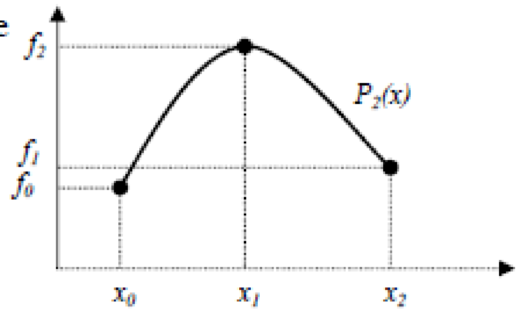


Ce qui s'écrit encore :

$$P_1(x) = \frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}(x-x_0) + y_0$$

- ***Polynôme de degré 2 (n = 2) :***

Le polynôme de Lagrange, passant par 3 points, est une parabole.



$$P_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Exemple :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous :

x_i	$x_0=0$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$
$f(x_i)$	$f_0=-4$	$f_1=-2$	$f_2=2$	$f_3=14$

Solution :

Dans ce cas on a 4 points, donc le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

On calcul les coefficients polynômes de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$P_3(x) = (-4)\left(-\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)\right) + (-2)\left(\frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x)\right)$$
$$+14\left(\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)\right)$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

2.2.2 Interpolation de Newton

2.2.2.1 Différences divisées d'une fonction

Forme générale :

La forme de Newton du polynôme d'interpolation est :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Où P_n est le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Les coefficients a_n seront trouvés en utilisant des différences divisées d'ordre n de la fonction f.

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = f(x_0) + a_1(x_1-x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

On procède de la même manière jusqu'à l'obtention de a_n.

Définition 2.1:

Soit une fonction définie sur *[a, b]* et x_0, $x_1, \ldots, x_n$ *(n+1)* points de [a, b] distincts. On appelle différences divisées d'ordre *k* de *f* les relations de récurrences suivantes :

- **d'ordre *0* :** $f[x_i] = f(x_i)$
- **d'ordre *1* :** $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$
- **d'ordre 2 :** $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

  ...

- **d'ordre *k* :** $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

D'après cette définition on a :

$$\begin{cases} a_0 = f[x_0] = f(x_0) \\ a_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ \quad \vdots \\ a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{cases}$$

Ces coefficients a_n sont les différences divisées d'ordre *n* de la fonction *f*.

Théorème 2.1:

Le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à *n* passant par les points $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,\ldots, n$ peut s'écrire:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé *forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences divisées.*

Calcul des différences divisées :

Le tableau des différences divisées permet de calculer les différences divisées d'une fonction selon le schéma suivant :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	$\cdots$	$f[x_i, \ldots, x_{i+n}]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\cdots$	
x_2	$f[x_2]$		$\cdots$		$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
		$\cdots$		$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Exemple :

Trouver le polynôme d'interpolation de Newton qui passe par les points suivants (0,1), (2,5) et (4,17).

Solution:

On a 3 points, donc le degré du polynôme est 2.

Le polynôme d'interpolation de Newton est :

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

On construit le tableau des différences divisées de f :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{5-1}{2-0} = 2$	
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 5$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{6-2}{4-0} = 1$
		$f[x_1, x_2] = \frac{17-5}{4-2} = 6$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 17$		

On obtient :

$$P_2(x) = 1 + 2x + x(x-2)$$

$$P_2(x) = 1 + x^2$$

2.2.2.2 Différences finies progressives (cas des points équidistants)

Dans ce cas les points d'interpolation sont en progression arithmétiques, i.e. :

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h, \dots,\ x_n = x_0 + nh, \quad h > 0$$

Définition 2.2:

Soient $f(x_i) = y_i$ pour $i=0, 1, \dots, n$ des nombres réels. On appelle différences finies d'ordre k de f les relations de récurrences suivantes :

- **d'ordre 1** : $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$
- **d'ordre 2** : $\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-2$

  …
- **d'ordre k** : $\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-k$

Convention $\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$, pour $i = 0, 1, \dots, n$

Table des différences finies progressives :

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	…	$\Delta^n f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$					
		$\Delta f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$			
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$		
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$		…	
						$\Delta^n f(x_0)$
		$\Delta f(x_2)$		…		
x_3	$f(x_3)$		…		…	
				$\Delta^3 f(x_{n-3})$		
		…				
…	…		$\Delta^2 f(x_{n-2})$			
		$\Delta f(x_{n-1})$				
x_n	$f(x_n)$					

Relation entre les différences finies progressives et les différences divisées :

Théorème 2.2:

Soit f une fonction dont on connait les valeurs $f(x_i) = y_i$, i=0, 1, …, n, avec $x_i = x_{i-1} + ih,\ h > 0$. Alors :

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k (f(x_i))}{h^k\, k!} \text{ pour } 0 \le i \le i+k \le n$$

Où $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$ est la différence divisée d'ordre k de f aux points $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ et $\Delta^k(f(x_i))$ est la différence finie d'ordre k au point $f(x_i)$.

Polynôme d'interpolation de Newton par les différences finies :

Théorème 2.3:

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ points équidistants. Le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n passant par ces points peut s'écrire:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences finies.

Exemple :

Trouver le polynôme d'interpolation de Newton passant par les points suivants :

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	1	5	17

Solution :

On a 3 points, donc le degré de polynôme est $n=2$.

On remarque que les points donnés sont équidistants avec le pas d'interpolation $h=2$, alors sous la forme de Newton par les différences finies, le polynôme d'interpolation de f est donné par :

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Où : $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 2$

Le calcul des différences finies se fait comme suit :

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$		
		$\Delta f(x_0) = 5 - 1 = 4$	
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 5$		$\Delta^2 f(x_0) = 12 - 4 = 8$
		$\Delta f(x_1) = 17 - 5 = 12$	
$x_2 = 4$	$f(x_2) = 17$		

D'où,

$$P_2(x) = 1 + 2x + x(x-2)$$

$$P_2(x) = 1 + x^2$$

2.3 Estimation de l'erreur d'interpolation

Soit $f : [a,b] \to IR$ de classe C^{n+1}. Notons P_n son polynôme d'interpolation aux nœuds x_0, $x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Où $M = \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{n+1}(x) \right|$