وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

المحاضرة الأولى – المعادلات التفاضلية -

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2023 / 2024

المحور الاول/ المعادلات التفاضلية

تعريف المعادلة التفاضلية

ليكن y دالة لمتغير x قابلة للاشتقاق **n مرة**

نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة كل معادلة من الشكل

$$f(x) = y(x), y(\acute{x}), \acute{\acute{y}}(x), \ \ldots, y^{(n)}(x) \ldots (1)$$

يسمى الشكل العام ل $y(x)$ الّذي يحقق (1) الحل العام للمعادلة التفاضلية .

يسمى الحل الخاص كل حل يحقق الشروط الخاصة التي تسمى الشروط الابتدائية

مثال /

معادلة تفضلية من الرتبة الاولى $x^2y + \acute{y} = 0$

$x\acute{y} + 5\acute{\acute{y}} = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

انواع المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى

من الشكل

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

مثال /حل المعادلة التفاضلية

$$\acute{y} = (y-1)(y-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$$

$$\frac{dy}{(y-1)(y-2)} = dx$$

$$\frac{dy}{(y-2)} - \frac{dy}{(y-1)} = dx$$

$$ln|y-2| - ln|y-1| = x + c$$

$$ln\frac{y-2}{y-1} = x + c$$

$$\frac{y-2}{y-1} = e^{x+c}$$

$$y = \frac{e^{x+c}-2}{e^{x+c}-1}$$

حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى بطريقة فصل المتغيرات

مثال1 /حل المعادلة التفاضلية

$$\acute{y} = 2\text{x} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

$$dy = (2x-1)dx$$

$$y = x^2 - x + c$$

مثال2 / حل المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\acute{y} - xy^2 = 0$$

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-1}{2}ln|1-x^2|+\text{c}$$

$$y = \frac{1}{c + (ln|1 - x^2|)^{\frac{-1}{2}}}$$

المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف المعادلة التفاضلية المتجانسة

لتكن g دالة معرفة على $/R^2$

-نقول ان الدالة متجانسة من الدرجة n ا ذ كان

$$\forall(x,y) \in /R^2 : g(tx,ty) = t^n g(x,y)$$

مثال /

$$F(x,y) = y + xe^{\frac{x}{y}}$$

$$F(tx,ty) = ty + txe^{\frac{x}{y}} = F(x,y) = y + xe^{\frac{x}{y}}$$

المعادلات التفاضلية غير المتجانسة

لتكن g دالة معرفة على $/R^2$

-نقول ان الدالة غير متجانسة ادكان

$$\forall(x,y) \in /R^2 : g(tx,ty) \neq tg(x,y)$$

مثال /

$F(x,y) = \frac{x-y-4}{2x-y+1}$معادلة تفاضلية غير متجانسة

حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية

نسمي حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية كل معادلة من الشكل

حيث $a\acute{\acute{y}} + b\acute{y} + cy = f(x)$

$a \neq 0, (a,b) \in/R^2$

ا ذاكان $f(x) = 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 2 ذات معاملات متجانسة

-لندرس بعض الحالات

-نفرض في كل الحالات ان $f(x) = 0$

-ا ذاكان $(a,b) = (0,0)$

فان $a\acute{\acute{y}} = 0$ ومنه $y(x) = k_1x + k_2$ حيث $(k_1,k_2) \in/R^2$

-ا ذاكان $C = 0$ فان $a\acute{\acute{y}} + b\acute{y} = 0$ حلها $y = ce^{\frac{-b}{a}}$

مثال / $\acute{\acute{y}} + a\acute{y} + by = 0 \rightarrow (*)$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$r^2 + ar + b = 0$$

ا ذاكان $\Delta = 0$

فان المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية لها جذر مضاعف r_0

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية 1هو $\boldsymbol{y = (\alpha x + \beta)\ e^{\ 0x}}$

$\boldsymbol{\alpha, \beta}$ عددان حقيقيان

ا ذاكان $\Delta > 0$

فان المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية لها جذران مختلفان r_1, r_2

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية 1هو $\boldsymbol{y = \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}}$

$\boldsymbol{\alpha, \beta}$ عددان حقيقيان

مثال1 عين الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\acute{\acute{y}} - 4\acute{y} + 4y = 0$$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

فان المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية لها جذر مضاعف $r_0 = 2$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $\boldsymbol{y = (\alpha x + \beta)\ e^{2x}}$

$\boldsymbol{\alpha, \beta}$ عددان حقيقيان

مثال2 عين الحل العام للمعادلة التفاضلية حيث

$$y(0) = 2, \ \ y\acute{}(0) = -1$$

$$\acute{\acute{y}} + 3\acute{y} - 4y = 0$$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

$$\Delta > 0$$

فان المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية لها جذران مختلفان $1 = r_1, -4 = r_2$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية 1هو $\boldsymbol{y = \alpha e^{x}} + \beta \boldsymbol{e^{-4x}}$

$\boldsymbol{\alpha, \beta}$ عددان حقيقيان

حل المعادلة التفاضلية

$$\boldsymbol{\acute{\acute{y}} + a\acute{y} + by = f(x)} \to (**)$$

$$(\boldsymbol{a, b} \in /\boldsymbol{R^2})$$

1°نجد اولا حل عام ل $(*)$ $\acute{\acute{y}} + a\acute{y} + by = 0 \to (*)$

2°نعين حل خاص ل $(**)$

3°يكون حل $(**)$ هو حاصل جمع الحلين الخاص ل$(**)$ والحل العام ل$(*)$

مثال /

1-جد حل المعادلة التفاضلية

$$\boldsymbol{\acute{\acute{y}} - 2\acute{y} - 15y = 3x^2 + 1} \to (**)$$

2- عين حل خاص يحقق

$$y\acute{(}0) = -1\, , y(0) = 0$$

الحل

$$\boldsymbol{\acute{\acute{y}} - 2\acute{y} - 15y = 0} \to (*)$$

المعادلة المميزة هي $-15 - 2\mathrm{r} + r^2 = 0$

ومنه الحل العام ل$(*)$**هو** $\boldsymbol{y(x) = \beta e^{-} + \alpha e^{5x}}$

بما ان الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ **من الدرجة الثانية يكون الحل الخاص من الشكل** $\boldsymbol{y = c + bx + ax^2}$

$$\acute{y} = b + 2ax$$

$$\acute{\acute{y}} = 2a$$

بالتعويض في $(**)$**نجد**

$$a = \frac{-1}{5}, c = \frac{-109}{75} \quad , b = \frac{-4}{15}$$

فيكون الحل الخاص $\boldsymbol{y = \frac{-109}{75} + \frac{-4}{15}x - \frac{1}{5}x^2}$

ومنه الحل العام

$$\boldsymbol{y(x) = \beta e^{-} + \alpha e^{5x} - \frac{109}{75} + \frac{-4}{15}x - \frac{1}{5}x^2}$$

لدينا

$$y\acute{(}0) = -1\,, y(0) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \alpha + \beta + \dfrac{109}{75} = 0 \\ 5\alpha - 3\beta + \dfrac{-4}{15} = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-203}{300} \\ \beta = \dfrac{-233}{300} \end{cases}$$