وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

المحاضرة الثانية – الدوال ذات متغيرين -

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2023 / 2024

المحور الثاني / الدوال ذات متغيرين

تعريف /

نسمي دالة ذات متغيرين كل دالة معرفة

$$/R \times /R \to /R$$

$$(x, y) \to f(x, y)$$

مثال /

$$f(x, y) = ln(x^2 + y^2 - x + y - 3)$$

$$def = \{(x, y) \in /R \quad /(x^2 + y^2 - x + y - 3) > 0\}$$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) > \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$$

اذن مجموعة التعريف هي خارج مجال الدائرة التي مركزها

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{2}}$

$$f(x, y) = \frac{x - 7}{2x - 3y - 2}$$

$$def = \{(x, y) \in /R \quad /2x - 3y - 2 \neq 0\}$$

اذن مجموعة التعريف هي نقاط المستوي ماعدا المستقيم ذو المعادلة

$$2x - 3y - 2 = y$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى

$$Z = f(x, y)$$

$$\acute{Z}_x = \acute{f}_x = \frac{\delta f}{\delta x}(x, y)$$

$$\acute{Z}_y = \acute{f}_y = \frac{\delta f}{\delta y}(x, y)$$

$$f(x, y) = ln(x^2 + xy^2 - x + y - 3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = \acute{f}_x = \frac{2x + y^2 - 1}{x^2 + xy^2 - x + y - 3}$$

$$\acute{f}_y = \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + xy^2 - x + y - 3}$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

لتكن دالة ذات متغيرين اذاكانت الدالة لها مشتقات جزئية من الرتبة الاولى , ومشتقاتها من الرتبة الاولى لها مشتقات جزئية تسمى هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

مثال /

$$f(x, y) = ln(x^2 + xy^2 - x + y - 3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = \acute{f}_x = \frac{2x + y^2 - 1}{x^2 + xy^2 - x + y - 3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) = \acute{\acute{f}}_x$$
$$= \frac{2(x^2 + xy^2 - x + y - 3) - (2x + y^2 - 1)(2x + y^2 - 1)}{(x^2 + xy^2 - x + y - 3)^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) = f''_y$$
$$= \frac{2x(x^2+xy^2-x+y-3)-(2xy+1)(2xy+1)}{(x^2+xy^2-x+y-3)^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta xy}(x,y) = f''_{xy} = \frac{\delta^2 f}{\delta yx}(x,y) = f''_{yx}$$
$$= \frac{2y(x^2+xy^2-x+y-3)-(2x+y^2-1)(2yx+1)}{(x^2+xy^2-x+y-3)^2}$$

معادلة لابلاس

لتكن الدالة قابلة للاشتقاق نقول ان الدالة تحقق معادلة لابلاس اذا تحقق الشرط التالي/

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) = 0$$

مثال /

$$f(x,y) = e^{-2y}cos2x$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = f'_x = -2e^{-2y}cos2x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) = f''_x = -4e^{-2y}cos2x$$

$$f'_y = \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = -2e^{-2y}cos2x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) = f''_y = 4e^{-2y}cos2x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y)+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)=0$$

التكاملات البسيطة لدوال ذات متغيرين

مثال /

1) $\int(x^2+xy^2-x+y-3)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2+xy-3x+c$

2) $\int(x^2+xy^2-x+y-3)dy=x^2y+\frac{1}{3}xy^3-xy+\frac{1}{2}y^2-3y+c$

3) $\int_1^2(x^2+xy^2-x+y-3)dx$

$$=\left[\frac{1x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2+xy-3x+c\right]_1^2$$

$=\frac{8}{3}+2y^2-2+2y-6-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}-y+3$

4) $\int_{-1}^{0}(x^2+xy^2-x+y-3)dy$

$$=\left[x^2y+\frac{1}{3}xy^3-xy+\frac{1}{2}y^2-3y+c\right]_{-1}^{0}$$

$$=-x^2-\frac{1}{3}xy^3+xy+\frac{1}{2}+3$$

التكاملات المضاعفة لدالة ذات متغيرين

مثال /

احسب التكامل المضاعف الاتي

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y)dxdy$$

حيث

$$\sigma = \{(x, y) \in /R^2 \quad / \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y)dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}(1 - x)^3\right]_0^1$$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$