

CHAPITRE I : LA CONVECTION THERMIQUE

(Thermal convection, الحمل الحراري)

I.1 Introduction

La convection thermique est le transfert d'énergie thermique au sein d'un fluide en mouvement ou entre un fluide en mouvement et une paroi solide qui est à une température différente entre eux et elle peut être naturelle ou forcée.

الحمل الحراري هو نقل للطاقة الحرارية داخل مائع متحرك أو بين مائع متحرك وجدار صلب عند درجة حرارة مختلفة بينهما ويمكن أن يكون طبيعيًا أو قسريًا .

Convection naturelle

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs telles que le gradient de température (convection thermique), ou le gradient de concentration entre deux solutions (convection solutale) .

Un exemple de convection thermique naturelle est celui qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate , devient moins dense et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède ; ensuite, il est remplacé par de l'air froid et ainsi le processus continue ; et produit ainsi un mouvement continu du fluide (air) due au différence de température et de densité.

الحمل الحراري الطبيعي هو ظاهرة لميكانيكا الموائع ، تحدث عندما يؤدي التدرج إلى حركة المائع. يمكن أن يرتبط التدرج بمقادير مختلفة مثل درجة الحرارة (الحمل الحراري) ، او الاختلاف في التركيز بين محلولين .
و كمثال على الحمل الحراري الطبيعي هو ما يحدث على طول المدفأة في المنزل. يسخن الهواء البارد عند ملامسته للمدفأة، ويتمدد ويصبح اقل كثافة ويرتفع تحت تأثير دافعة أرخميدس . ثم يتم استبداله بالهواء البارد وهكذا تستمر العملية ؛ وبالتالي تنتج حركه مستمرة للمائع (الهواء) نتيجة الاختلاف في درجه الحرارة والكثافة .

Convection Forcée

La convection forcée résulte d'une action extérieure pour déplacer un fluide avec (une pompe , turbine, ventilateur.....ect). Dans ce cas, le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée: :le mouvement du vent, La circulation sanguine dans le corps humain....ect.

ينتج الحمل القسري عن فعل خارجي من اجل تحريك مائع بواسطة (مضخة ، توربين ، مروحة ، إلخ). في هذه الحالة يكون النقل أسرع مما في حالة الحمل الحراري الطبيعي. وكمثال على ذلك: حركة الرياح والدورة الدموية في جسم الإنسان إلخ.

I.2 Définition

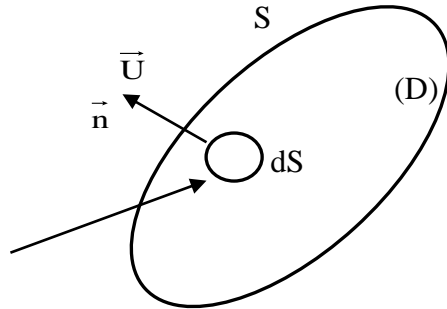
Différence totale d'une fonction:

Soit f une fonction scalaire dérivable par rapport aux variables (t,x,y,z) .

La différence totale de cette équation est donnée par:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (1)$$

I.3 Equation de continuité (ou de la conservation de la masse)



Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par par une surface S fermée de volume V .

- la partie de fluide à une masse $m = \iiint_V \rho \cdot dV$ (2)
si $\rho = \text{Cte} \rightarrow m = \rho \cdot V$

- selon l'équation (1), la variation de la masse (m) pendant dt s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(m) \quad (3)$$

- le terme $(\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(m))$ représente le débit massique en (kg/s)

on peut écrire donc : $\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(m) = \iint_S -\rho \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds$ (4)

le signe (-) est introduit afin que le flux entrant soit compté positive

- et le terme $(\frac{\partial m}{\partial t})$ représente la création de la masse instantané

- Remplaçant les équations (2) et (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (5)$$

en utilisant le théorème d'Ostrogorski

$$\iint_S \rho \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds = \iiint_V \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) \cdot dV \quad (6)$$

En remplaçant l'équation (6) dans l'équation (5) :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) \cdot dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) \right] dV \quad (7)$$

- Le principe de la conservation de la masse nous permet d'écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) \right] dV = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (8)$$

Cette équation est appelé l'équation de continuité

I.3.1 Cas particuliers:

a) Ecoulement stationnaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

b) Ecoulement incompressible ($\rho = \text{cte}$)

la masse volumique est constante dans tout le fluide est indépendante du temps :

$$\text{div}(\vec{U}) = 0$$

I.3 Equation du mouvement (ou de la conservation du quantité du mvt)

ان المائع الموجود في المجال (D) والمحدد بالمساحة (S) سيكون تحت تأثير قوى مؤثرة عليه هي القوة الكتلية في وحدة الحجم وأخرى قوى إجهاد مماسية ناتجة عن لزوجة المائع وهي بمثابة قوى احتكاك بين جزيئاته (contraintes de cisaillement) وضغط ناظمي (قوى الضغط) تؤثران على المساحة ونرمز لها بالرمز \vec{T} .

Le fluide dans le domaine (D) qui est limité par la surface (S) sera sous l'influence des forces qui sont la force massique par unité de volume, et les forces de contrainte tangentielle résultant de la viscosité du fluide, qui représentent les forces de frottement entre ses molécules (contraintes de cisaillement) et les forces de pression.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحرير على الكتلة الموجودة داخل المجال نحصل على:

On applique la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \cdot \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rightarrow \iiint_V \rho \cdot dV \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint_V \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \iint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

avec $\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$

\vec{n} : vecteur unitaire normale à la surface

$\vec{\sigma}$: tenseur des contraintes ;

les composantes des tenseur des contraintes ($\sigma_{i,j}$) dépendent en générale par les variables essentielles comme la pression et la vitesse.

تكون مركبات تنسور الإجهاد ($\sigma_{i,j}$) على العموم متعلقة بالمتغيرات الأساسية منها الضغط والسرعة

Remarque : $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ c'est-à-dire $\sigma_{x,y} = \sigma_{y,x}$, $\sigma_{x,z} = \sigma_{z,x}$, $\sigma_{z,y} = \sigma_{y,z}$

$$\rightarrow \iiint \rho \cdot dV \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \iint \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (10)$$

et $\iint \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot ds = \iiint \text{div}(\vec{\sigma}) \cdot dV$ Théorème d'Ostrogorski

L'équation (9) devienne alors: $\iiint \rho \cdot dV \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \iiint \text{div}(\vec{\sigma}) \cdot dV$

Comme le volume est arbitraire, on peut écrire:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} + \text{div}(\vec{\sigma}) \quad (11)$$

$$\text{div}(\vec{\sigma}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}$$

في حالة الموائع اللزجة التي تخضع لعلاقة نيوتن فان :

Dans le cas des fluides visqueux soumis à la relation newtonienne, alors:

$$(12) \sigma_{i,j} = -p \cdot \delta_{i,j} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{i,j} \cdot \text{div}(\vec{U})$$

ou p est la pression et $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

λ et μ sont les coefficients de Lami (viscosité)

- **Stocks** a trouvé une relation entre λ et μ tel que: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

La partie suivante de l'équation (12)

$\tau_{i,j} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{i,j} \cdot \text{div}(\vec{U})$ est appelée tenseur des contraintes de la viscosité du fluide

D'après ces données, l'équation (11) devient :

$$\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i + \text{div}(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}u_i}) + \text{div} \left(\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \text{div}(\vec{U})) \quad (13)$$

ou $i=(x \text{ ou } y \text{ ou } z)$

C'est l'équation générale du mouvement

I.3.1 Quelques cas particuliers

1) **Fluide incompressible ($\rho=\text{cte}$)**

Dans ce cas là, et d'après l'équation de continuité $\rightarrow \text{div}(\vec{U}) = 0$

$$\text{L'équation (13)} \rightarrow \rho \cdot \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i + \text{div}(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}u_i}) + \text{div}\left(\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

2) Fluide incompressible avec une viscosité constante ($\mu=\text{cte}$)

$$\text{L'équation (12)} \rightarrow \rho \cdot \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i + \mu \cdot \Delta \cdot u_i \quad (15)$$

$$\text{Avec } \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}u_i}$$

3) Fluide parfait ($\mu=0$)

L'équation du mouvement pour un fluide parfait ($\mu=0$) dite aussi équation **d'Euler** s'écrit donc sous la forme :

$$\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i$$

Si l'écoulement est dimensionnelle suivant ox et oy , l'équation (15) peut s'écrire :

$$\text{Suivant } (ox) : \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

$$\text{Suivant } (oy) : \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

Remarque: Dans la convection thermique ($\rho \cdot F_i = \rho \cdot g_i$)

I.4 Equation de conservation de l'énergie

ان دراسة الحمل الحراري تتطلب معرفة تغير درجة الحرارة داخل المائع , لهذا يجب علينا كتابة معادلة انحفاظ الطاقة والتي نحصل عليها بتطبيق المبدأ الأساسي للترموديناميك للمائع المتحرك .ونص هذا المبدأ هو أن التغير في الطاقة الكلية (الطاقة الحركية + الطاقة الداخلية) بالنسبة للزمن للمائع بين حالتين توازن يساوي الى الجمع بين عمل القوى الخارجية وكمية الحرارة المكتسبة من قبل كمية المائع .

L'étude de la convection nécessite la connaissance du changement de température à l'intérieur du fluide, nous devons donc écrire l'équation de conservation de l'énergie, que nous obtenons en appliquant le principe fondamental de la thermodynamique à un fluide en mouvement.

Ce principe énonce que la variation d'énergie totale (cinétique + interne) du fluide par rapport au temps entre deux états d'équilibre est la somme des forces externes et la quantité de chaleur acquise par le fluide.

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt} (E_{\text{int}} + E_{\text{cinétique}}) = W(F_{\text{ext}}) + Q \quad (18)$$

نفرض ان e تمثل الطاقة الداخلية في وحدة الكتلة لكمية المائع .
اذن فان المعادلة السابقة الخاصة بالمبدأ الاول للترموديناميك الحرارية تكتب على النحو التالي :

Supposons que e représente l'énergie interne par unité de masse de la quantité de fluide.
donc, l'équation précédente s'écrit comme suivant :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (e \cdot dm + \frac{1}{2} U^2 dm) = \iiint_V \vec{F} \cdot \vec{U} dm + \iint_s \vec{T} \vec{U} \cdot \vec{ds} + \iint_s k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{ds}$$

tel que: $dm = \rho dV$; k est le conductivité thermique du fluide ;

\vec{U} est le vecteur vitesse, \vec{T} est la contrainte de surface (force de pression et des contraintes de cisaillement due au frottement entre les molécules du fluide

$$\iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV + \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) dV = \iiint_V \rho \cdot \sum_i F_i \cdot u_i \cdot dV + \iint_s \sum_i u_i \cdot \sigma_{i,j} \cdot n_j \cdot ds + \iiint_V \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) \cdot dV \quad (19)$$

Après plusieurs transformations sur l'équation (19) (voir l'annexe ci-joint à la fin de ce chapitre), nous pouvons obtenir l'équation générale de l'énergie comme suivant :

بعد تحويلات متعددة على المعادلة (19) (انظر للملحق **annexe** في آخر هذا الفصل) 'فانه يمكننا الحصول على المعادلة العامة للطاقة كالتالي :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(K \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) + \beta \cdot T \cdot \frac{dp}{dt} + \Phi \quad (20)$$

(équation générale de la conservation de l'énergie)

coefficient d'expansion volumique à P=cte $\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P=cte}$ tel que:

C_p : chaleur spécifique (J/Kg)

K : conductivité thermique du fluide

Φ : fonction de dissipation (دالة التبديد)

tel que:

$$\Phi = \mu \cdot \sum_{i,j}^3 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mu (\text{div } \vec{U})^2 \quad (21)$$

est la fonction de dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur due au frottement visqueuse entre les molécules du fluide.

Par exemple, dans les coordonnées (x,y) , Φ s'écrit :

$$\Phi = 2\mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (\text{div } \vec{U})^2 \quad (22)$$

avec $(\text{div } \vec{U})^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$

Remarque

1) pour les gaz : $\beta = \frac{1}{T}$

2) dans les cas des liquides: le terme (βT) est test faible , on peut négliger le terme $(\beta T \frac{dp}{dt})$ de l'équation (20).

3) dans le cas où $(k=cte) \rightarrow \text{div}(K.\text{grad } T)= K.\Delta T$, l'équation (20) devienne :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k\Delta T + \beta.T. \frac{dp}{dt} + \Phi \quad (23)$$

avec:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} T$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} p$$

Cas particuliers:

1) cas où le régime est stationnaire :

$$\rho c_p \vec{U} \text{grad} T = k\Delta T + \beta.T.\vec{U} \text{grad} P + \Phi$$

2) dans le cas où l'effet de viscosité est très faible , dans ce cas là, la fonction de dissipation est négligeable

3) Si le fluide est au repos ($U_i=0$)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T \quad (\text{le transfert est par conduction dans le fluide})$$

et si le régime est permanent dans les fluides au repos, donc:

$$\Delta T = 0 \quad \text{équation de Laplace}$$

من هنا نستنتج ان الحمل الحراري يكون داخل الموائع المتحركة وان الحد الاساسي الذي يعبر عن هذه الظاهرة هو : $\vec{U} \text{grad} T$ اضافة الى تاثير اللزوجة المتمثلة في دالة التبديد Φ ومن هنا يمكننا ان نلخص ظاهرة الحمل الحراري بمعادلات الانحفاظ التالية :

Nous concluons que la convection thermique se produit à l'intérieur des fluides en mouvement et que le paramètre principale qui exprime ce phénomène est : $\vec{U} \text{grad} T$, en plus de l'effet de viscosité représenté par la fonction de dissipation Φ .

On peut donc résumer le phénomène de convection avec les équations de conservation suivantes :

Equation de continuité: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0$

Equation de mouvement; $\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i + \mu \cdot \Delta \cdot u_i$

Equation de l'énergie: $\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T + \beta \cdot T \cdot \frac{dp}{dt} + \Phi$

La solution de ces équations nous permet de déterminer le champ des vitesses et de température.

Annexe A ملحق

de L'équation (19)

$$\iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV + \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) dV = \iiint_V \rho \cdot \sum_i F_i \cdot u_i \cdot dV + \iint_S \sum_i u_i \cdot \sigma_{i,j} \cdot n_j \cdot ds + \iiint_V \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \cdot T) \cdot dV \quad (19)$$

On intègre cette équation sur tout le volume, on a:

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) = \rho \sum F_i \cdot u_i + \text{div}(u_i \cdot \sigma_{i,j}) + \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \cdot T) \quad (A1)$$

L'enthalpie **h** par unité de masse du fluide est définie par :

$$h = e + P / \rho \quad (A2)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(e + p/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(p/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (A3)$$

de l'équation de continuité : $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div}(\vec{u})$

On remplace dans (A3) on trouve: $\frac{dh}{dt} = \frac{d(e + P/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(P/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho} \text{div}(\vec{u}) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} + \left(\frac{p}{\rho} \right) \text{div}(\vec{u}) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (A4)$$

L'enthalpie est une fonction de T et P , $h = f(T, P)$ donc:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} (1 - \beta \cdot T)_p \frac{dP}{dt} \quad (A5)$$

remplaçant (A5) dans (A4) on trouve:

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho C_p \frac{dp}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} + P \text{div}(\vec{u}) \quad (\text{A6})$$

de l'éq. (A1) on peut écrire aussi:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) = \rho U_i \frac{dU_i}{dt} \quad (\text{A7})$$

remplaçant maintenant (A6) et (A7) dans l'éq. (A1)

$$\rho C_p \frac{dp}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} + P \text{div}(\vec{u}) + \rho U_i \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i \cdot u_i + \sum \frac{\partial (u_i \cdot \sigma_{i,j})}{\partial x_j} + \text{div}(\mathbf{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad (\text{A8})$$

avec:
$$\sigma_{i,j} = -p \cdot \delta_{i,j} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{i,j} \cdot \text{div}(\vec{U})$$

Rappelant que l'équation du mvt (13) est donnée par:

$$\rho \cdot \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i + \text{div}(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u_i) + \text{div} \left(\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \text{div}(\vec{U}))$$

Si on multiplie cette équation par U_i , on obtient:

$$\rho \cdot u_i \frac{du_i}{dt} = - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot F_i u_i + u_i \text{div}(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u_i) + u_i \text{div} \left(\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \text{div}(\vec{U})) \quad (\text{A9})$$

Remplaçant maintenant l'équation (A9) dans l'équation (A8), on trouve l'équation (20) de l'énergie suivante:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\mathbf{K} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) + \beta \cdot T \cdot \frac{dp}{dt} + \Phi$$