CHAPITRE II ANALYSE DIMENSIONNELLE

التحليل البعدي والتشابه

نلاحظ انه عند استعمال المعادلات السابقة الاستمرارية والحركة والطاقة فانه يجب معرفة عدة مقادير منها الخواص الفيزيائية للمائع (.... ρ,μ,ν,Cp, k) وكذلك درجة حرارة المائع ودرجة حرارة السطح المتلامس معه والضغط والسرعة الى غير ذلك ..
إن طريقة التحليل البعدي تمكننا من التخفيض من معرفة هذه المقادير الفيزيائية العديدة لظاهرة الحمل الحراري او غيره وهذا بالجمع بين عدة مقادير للحصول على مقدار لا بعدي واحد بدون وحدة (sans dimension ou adimensionnelle) يميز نوع وطبيعة الانسياب مثل عدد Reynolds اوعدد Nusselt وغيرهم ....وهذا مهما كان نوع المائع .
ولإستعمال هذه الاعداد فانه يجب معرفة الخواص الهندسية والفيزيائية التالية :

Lo - طول مرجعي (Longueur caractéristique) مثل طول صفيحة او قطر انبوب
Vo - سرعة مرجعية للانسياب
To- درجة حرارة مرجعية
ومنه فانه يمكن إدراج او استعمال المتغيرات اللابعدية التالية :

On remarque que lors de l'utilisation des équations précédentes de continuité, de mouvement et d'énergie, plusieurs grandeurs doivent être connues, dont les propriétés physiques du fluide (ρ, μ, ν, Cp, k....), ainsi que la température de le fluide, la température de la surface en contact avec le fluide la pression et la vitesse, etc.
La méthode d'analyse dimensionnelle permet de réduire la connaissance de ces nombreuses grandeurs physiques du phénomène de convection ou autre, et ceci en combinant plusieurs grandeurs pour obtenir une seule grandeur adimensionnelle sans unité (sans dimension ou adimensionnelle) caractérise le type et la nature de l'écoulement comme le nombre de Reynolds, le nombre de Nusselt, et autres.... et ce quel que soit le type de fluide.
Pour utiliser ces nombres, les propriétés techniques et physiques suivantes doivent être connues :

Lo - une longueur de référence (longueur caractéristique) telle que la longueur d'une plaque ou le diamètre d'un tube
Vo - vitesse de référence de l'écoulement
To- Température de référence
Par conséquent, les variables adimensionnelles suivantes peuvent être utilisées:

$$x_i' = \frac{x_i}{Lo},\quad U_i' = \frac{u_i}{Vo},\quad t' = \frac{Vo}{Lo}t,\quad \theta = \frac{T-To}{Tp-To}\ ,\quad P' = \frac{p}{\rho_o V_o^2},\quad i = x,y \text{ ou } z \qquad \textbf{(II.1)}$$

II.1 Les hypothèse utilisés : الفرضيات المستعملة

II.1.1 Cas de la convection forcée

في حالة الحمل القسري عامة نهمل القوى الكتلية (ρFi = 0) وذلك لان حركة المائع ناتجة عن فعل خارجي وبالتالي فان قوة دفع هذا المائع تكون اكبر بكثير من القوة الكتلية والمتمثلة في قوة الثقل ...وسنفرض أيضا ان الكثافة الحجمية للمائع تبقى ثابتة وكذلك دالة التبديد Φ مهملة امام باقي الحدود الاخرى ...بهذه الفرضيات فان معادلات الانحفاظ تكتب كما يلي :

Dans le cas de la convection forcée, généralement on néglige les forces massiques (ρ.Fi=0) car le mouvement du fluide est provoqué par une action extérieure, et donc la force de poussée de ce fluide est bien supérieure à la force massique représentée par la force de gravité.
On supposera également que la masse volumique du fluide reste constante, ainsi que la fonction de dissipation Φ est négligée devant le reste des autres termes...
Avec ces hypothèses, les équations de conservation s'écrivent comme suivant :

II.1.2 Equation du mouvement

$$\rho\frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\Delta U_i \qquad \textbf{(II.2)}$$

Après avoir remplacer les variables dimensionnelles par les variable adimentionnelles donnée dans (II.1) on obtient:

$$\rho_o\frac{V^2o}{Lo}\frac{dU'_i}{dt} = -\frac{\rho_o V^2o}{Lo}\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \mu\frac{Vo}{L^2o}\Delta' U'_i \qquad \textbf{(II.3)}$$

On multiple cette équation par $\left(\frac{Lo}{\rho_o V^2 o}\right)$ on obtient :

$$\frac{dU'_i}{dt} = -\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \frac{\mu}{\rho_o VoLo}\Delta' U'_i$$

avec $\Delta U_i = \frac{V_o}{L_o^2}\Delta' U'_i$

On remarque que cette équation est devenu adimensionnelle , c.à.d. tous les termes sont devenus sans dimension et le terme $\left(\frac{\mu}{\rho_o VoLo} = \frac{\nu}{VoLo}\right)$ est appelé le nombre de Reynolds **Re**

$$\frac{dU'_i}{dt} = -\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \frac{1}{Re}\Delta' U'_i \qquad \textbf{(II.4)}$$

II.1.3 L'équation d'énergie:

$$\rho cp\frac{dT}{dt} = K\Delta T + \frac{dp}{dt} \qquad \textbf{(II.5)}$$

Introduisant les variables adimensionnelles dans l'eq. (II.5) , on a:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{\rho cp}\cdot\frac{1}{Vo.Lo}\Delta'\theta + \frac{V^2o}{cp(Tp - To)}\frac{dP'}{dt'}$$

Rappelant que le nom de **Prandtl** (sans dimension est définit par: $Pr = \frac{\mu cp}{k}$ et le nombre d'Eckart $Ec = \frac{V^2o}{Cp(Tp - To)}$ alors, l'équation devient :

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{Re.Pr}\Delta^{'}\theta+Ec\frac{dP^{'}}{dt^{'}} \qquad \textbf{(II.6)}$$

II.1.4 Le nombre de Nusselt

من الشروط الحدية الحرارية (conditions aux limites thermiques) بين المائع والسطح الذي ينساب عليه يمكننا الحصول على عدد لابعدي أخر يسمى بعدد نيوسالت (**Nu**) Nusselt حيث :
لدينا :

A partir des conditions aux limites thermiques entre le fluide et la surface sur laquelle il s'écoule, on peut obtenir un autre nombre adimensionnel appelé nombre de Nusselt tel que :

La densité de flux de chaleur: $q=-k(\frac{\partial T}{\partial y})_{paroi}=h(Tp-Tf)$

Si on introduit les variables adimensionnelles, alors:

$$q=-k\frac{\Delta T}{Lo}(\frac{\partial\theta}{\partial y^{'}})_{p}=h(Tp-Tf)$$

$$\textbf{(II.7)}\Rightarrow-(\frac{\partial\theta}{\partial y^{'}})_{p}=\frac{h.Lo}{k}=\frac{qLo}{k\Delta T}=Nu$$

II.2 Cas de la convection Naturelle

في حالة الحمل الطبيعي تكون كثافة المائع متغيرة مع درجة الحرارة وبالتالي فانه لا يمكننا اهمال القوة الكتلية $\rho Fi=-\rho gi$
في الحمل الطبيعي إن تغير الكثافة لا يؤثر كثيرا على كل الحدود من معادلات الانحفاظ ولكن يؤثر فقط في مقدار قوة الثقل ..لهذا نأخذ قيمة الكثافة تساوي للقيمة الثابة ρ_o ما عدا في قوة الثقل (ρgi) بحيث نستعمل هنا فرضية العالم **Boussinesq** والتي تعطي تغير الكثافة بدلالة درجة الحرارة بالعبارة التالية :
$\rho=\rho_0[1-\beta(T-To)]$

Dans le cas de la convection naturelle, la densité du fluide varie avec la température, donc on ne peut pas négliger la force de masse $\rho Fi=-\rho gi$.
Dans le cas de la convection naturelle, la variation de densité n'affecte pas beaucoup sur les termes des équations de conservation, mais cela n'affecte que sur la force gravitationnelle.
Par conséquent, nous prenons la valeur de densité égale à la valeur constante ρo à l'exception dans la force de gravité (ρgi), nous utilisons ici l'hypothèse de Boussinesq, qui donne la variation de densité en fonction de la température avec l'expression suivante:
$\rho=\rho_0[1-\beta(T-To)]$

II.2.1 Equation du mouvement:

$$\rho_o\frac{dU_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho gi+\mu\Delta U_i$$

$$\rho gi=-\rho g\frac{\partial z}{\partial xi}=-\rho_o g[1-\beta(T-To)]\frac{\partial z}{\partial xi}$$ Posons:

On peut écrire: $-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho gi=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\rho g\frac{\partial z}{\partial xi}=-\frac{\partial}{\partial x_i}(p+\rho_o gz)+\rho_o\beta g(T-To)\frac{\partial z}{\partial x_i}$

L'équation du mouvement devient :

$$\rho_o \frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(p + \rho_o g z) + \rho_o \beta g (T - To)\frac{\partial z}{\partial xi} + \mu \Delta U_i \qquad \textbf{(II.8)}$$

En introduisant maintenant les variables adimensionnelles on obtient:

$$\frac{dU'_i}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + g\beta \frac{L_o(T_p - To)}{V^2 o}.\theta.\frac{\partial z}{\partial xi} + \frac{1}{Re}\Delta' U'_i$$

est appelé le nombre de Richardson $\frac{g\beta Lo(Tp - To)}{V^2 o} = Ri$ le terme

Alors: $$\frac{dU'_i}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + Ri.\theta.\frac{\partial z}{\partial xi} + \frac{1}{Re}\Delta' U'_i \qquad \textbf{(II.9)}$$

بما انه في الحمل الطبيعي ليس هناك سرعة مرجعية Vo وذلك لان المائع كان في حالة سكون إلا بعد تسخينه أو تبريده فانه يبدأ بالحركة من السكون ولهذا فان اختيار السرعة المرجعية يكون عشوائيا ومن اجل ذلك ولتفادي هذا الاختيار العشوائي نأخذ مقدار لا بعدي أخر هو عدد **Grashoff** حيث :

Puisqu'il n'y a pas de vitesse de référence en convection naturelle Vo, puisque le fluide était au repos jusqu'à ce qu'il soit chauffé ou refroidi, il commence à se déplacer du repos. Ainsi, le choix de la vitesse de référence est aléatoire. Pour cela, et pour éviter ce choix aléatoire, on prend un autre grandeur sans dimension, qui est le nombre de Grashoff où :

$$Gr = \frac{g\beta(Tp - To)L^3 o}{\nu^2}$$

On peut démontrer que : $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

alors l'équation (32) devient: $$\frac{dU'_i}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \frac{Gr}{Re^2}.\theta.\frac{\partial z}{\partial xi} + \frac{1}{Re}\Delta' U'_i \qquad \textbf{(II.10)}$$

- **si** **Gr > Re²** la convection naturelle est dominant
- si **Gr < Re²** la convection forcée est dominant
- **si** **Gr = Re²** la convection est mixte (naturelle et forcée)

II.2.2 Equation de l'énergie:

De même, on introduit les variables adimensionnelle dans l'équation d'énergie on obtient l'équation d'énergie adimensionnelle suivante:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{Re.Pr}\Delta'\theta + Ec\frac{dP'}{dt'} \qquad \textbf{(II.11)}$$

وهنالك عدد أخر يسمى بعدد **Raleigh** حيث **(Ra=Gr.Pr)** يحدد طبيعة الانسياب في الحمل الحراري الطبيعي
Il existe un autre nombre appelé nombre de Raleigh, où (Ra=Gr.Pr)) détermine la nature de l'écoulement en convection naturelle .

II.3 Signification Physique des nombres adimensionnelles

المعنى الفيزيائي للإعداد الابعدية

1. Nombre de Reynolds Re: $\mathrm{Re} = \frac{v_o L_o}{\nu} = \frac{\rho v_o}{\frac{\mu v_o}{L_o}}$ représente le rapport entre la force d'inertie et la force de frottement visqueuse.

2. Nombre de Prandtl Pr : $Pr = \frac{\mu Cp}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$ représente le rapport entre le coefficient de la viscosité et le coefficient de la diffusivité thermique tel que : $\alpha = \frac{k}{\rho cp}$

3. Nombre de Nusselt Nu : $Nu = \frac{hLo}{k}$ représente le rapport entre la chaleur échangée par **convection** et par **conduction**

4. Nombre de Grashof Gr : représente le rapport entre la force de flottabilité (Archimède) **et la force de viscosité.**

5. Nombre d'Echart Ec: $Ec = \frac{V^2 o}{Cp(Tp - To)} = \frac{\rho V^2 o}{\rho Cp(Tp - To)}$ représente le rapport entre l'énergie cinétique due au pression et l'enrgie thermique échangé entre la paroi et le fluide**.**

6. Coefficient de frottement $\mathrm{Cf} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho v_0^2}$ tel que : $\tau_p = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$

représente le rapport entre la force de frottement tengentielle (*entre la parois de contacte et le fluide*) et la force de pression dans le fluide