

III. 1 Introduction

En 1905, Prandtl a pu découvrir que la vitesse d'écoulement d'un fluide sur les surfaces des corps solides augmente de zéro près de la surface du corps sur lequel il s'écoule jusqu'à ce qu'elle s'en éloigne d'une certaine distance. Son épaisseur est très petite par rapport aux dimensions de la surface qui s'y écoule. Cette épaisseur est appelée épaisseur de la couche limite (δx). (Epaisseur de la couche limite dynamique) car en dehors de cette épaisseur (la couche) la vitesse du fluide est égale à sa vitesse initiale U_∞ ou V_0 (Fig.1).

Cela signifie que l'effet de la viscosité (la force de frottement résultant de la viscosité) est très important et considérable dans cette couche limite, mais en dehors de cette couche, il est négligeable et donc le fluide est considéré comme un fluide idéal, car les propriétés d'écoulement ne sont pas affectées.

De même pour la température, la température à l'intérieur du fluide varie dans la couche dont l'épaisseur est très faible (δ_{th}) appelée couche **limite thermique**, (fig.2).

l'épaisseur des deux couches limites (dynamique et thermique) dépend de la nature du fluide, c'est-à-dire de la valeur du nombre de Pr, cela signifie qu'il peut être $\delta_D > \delta_{th}$ ou bien le contraire.

في سنة 1905 استطاع العامل (Prandtl) أن يكتشف أن سرعة انسياب المائع على سطوح أجسام صلبة تتزايد من الصفر بالقرب من سطح الجسم الذي ينساب عليه إلى أن تباعد عنه بمقدار معين سمكه صغير جدا مقارنة بأبعاد السطح المنساب عليه يسمى هذا السمك بسمك الطبقة الحدية (δx) (Epaisseur de la couche limite dynamique) حيث أن خارج هذا السمك (الطبقة) تكون سرعة المائع مساوية لسرعة الأصلية U_∞ أو V_0 (Fig.1).

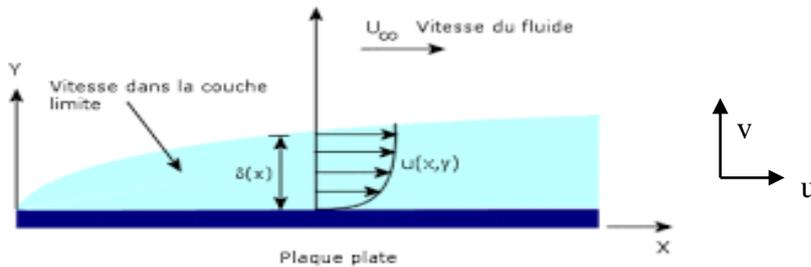


Fig.1. couche limite

هذا يعني أن تأثير اللزوجة (قوة الاحتكاك الناتجة عن اللزوجة) يكون مهما ومعتبرا في هذه الطبقة الحدية أما خارج هذه الطبقة فإنه يكون مهما وبالتالي فإن المائع يعتبر مائع مثالي وذلك لان خواص الانسياب لم تتأثر.

وكذلك بالنسبة لدرجة الحرارة فإن درجة الحرارة داخل المائع تتغير داخل طبقة سمكها يكون

صغير جدا (δ_{th}) تسمى بالطبقة الحدية الحرارية (couche limite thermique), (fig.2).

وان سمك الطبقتين الحديتين (الديناميكية والحرارية) يتوقف على طبيعة المائع اي على قيمة

عدد Pr هذا يعني انه يمكن ان يكون $\delta_D < \delta_{th}$ والعكس.

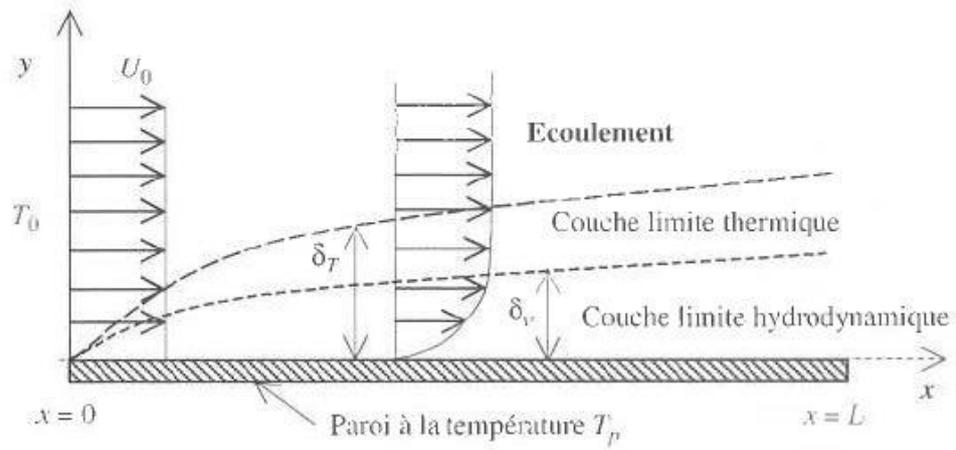


Fig.2. couche limite thermique et dynamique

III. 2. Les hypothèses de la couche limite

Considérons un fluide en écoulement sur une surface solide bidimensionnelle où ox est parallèle à l'écoulement et oy est normale sur celui-ci.

-L'épaisseur de la couche limite étant très faible devant les dimensions de cette surface longueur, largeur ou diamètre, Prandtl a pu arriver aux hypothèses suivantes:

لنعتبر مائع ينساب على سطح صلب ثنائي الأبعاد حيث ox موازي للانسياب و oy ناظمي عليه.
- بما أن سمك الطبقة الحدية صغير جدا أمام أبعاد هذا السطح الطول والعرض أو القطر فان Prandtl استطاع أن يتوصل إلى الفرضيات التالية :

Puisque $v \ll u$ dans la classe limite, les variations de v par rapport à x et y peuvent être négligés

devant les autres termes $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ (

بما أن $v \ll u$ داخل الطبقة الحدية فان تغيرات v بالنسبة ل x و y يمكن إهمالها أمام الحدود

(الأخرى) $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$)

- بما أن تأثير اللزوجة يكون معتبرا في اتجاه الناظم oy فان :

et puisque l'effet de viscosité est très important dans la direction y (la normale) donc

$$\frac{\partial u}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وكذلك بالنسبة لدرجة الحرارة $\frac{\partial T}{\partial y} \ll \frac{\partial T}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

بهذه الفرضيات يمكننا الحصول على معادلات الطبقة الحدية (Les équations de la couche limite)

III.3 Les équations de conservation

Utilisant les **approximations** suivantes pour un fluide en mouvement sur une plaque horizontale en régime permanent:

À l'entrée de la plaque et hors de la couche limite $u \approx V_0$ ou U_∞

$\partial y \approx \delta$ (la variation de y = l'épaisseur de la couche limite) et $\partial x \approx L$

III.3.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On utilise les approximations données et aussi $\partial u \approx V_0$ ou U_∞ et $\partial v \approx v_0$, on a:

$$(III.1) \quad \frac{V_0}{L} + \frac{v_0}{\delta} = 0 \rightarrow v_0 = -V_0 \cdot \frac{\delta}{L}$$

(on prend le signe positive)

III.3.2. Equation du mouvement:

$$\text{sur } ox: \quad \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (III.2)$$

Introduisant les approximations sur l'équation (III.2) :

$$\rho \left(V_0 \frac{V_0}{L} + \left(V_0 \frac{\delta}{L} \right) \frac{V_0}{\delta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{V_0}{L^2} + \frac{V_0}{\delta^2} \right)$$

$$\rightarrow \rho \left(\frac{V_0^2}{x} + \frac{V_0^2}{x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{V_0}{x^2} + \frac{V_0}{\delta^2} \right)$$

Le terme $\frac{V_0}{L^2} \approx \frac{V_0}{\delta^2}$ alors on peut négliger le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devant $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Alors l'équation (III.2) devient :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (III.3)$$

$$\text{sur } oy: \quad \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (III.4)$$

le terme $u \frac{\partial v}{\partial x} \approx V_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$ car $\delta \ll L$

de même pour le terme : $v \frac{\partial v}{\partial y} \approx V_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$

le terme $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx V_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$

et le terme $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ peut être négligé devant les force de pression, alors l'équation (III.4) peut s'écrire :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y \quad (\text{III.5})$$

Estimation de l'épaisseur de la couche limite dynamique:

: (III.3)

Pour déterminer l'épaisseur de la couche limite dynamique, on peut utiliser l'approximation suivante de l'équation (III.3) comme suit :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \rightarrow \frac{V_o^2}{x} \approx \frac{\mu V_o}{\rho \delta^2} = \nu \frac{V_o}{\delta^2}$$

$$\rightarrow \delta(x) = x / \sqrt{\frac{V_o \cdot x}{\nu}} = x / \sqrt{\text{Re}_x}$$

III.3.3 Equation de l'énergie:

$$\rho \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \phi \quad (\text{III.6})$$

Approximations :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \Phi \ll \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

avec ces approximations, l'équation (III.6) peut s'écrire :

$$\rho \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{III.7})$$

Conclusion

Avec ces hypothèses, les équations de conservation dans la couche limite sont :

1. Équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2. Equation du mouvement:

sur ox:
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

sur oy:
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y$$

3. Equation de l'energié:

$$\rho \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

III.4 Cas de la convection forcée

Dans ce cas, la force de poids est négligeable devant la force de pression et de frottement ($\rho F_i=0$), et les équations de conservation dans la couche limite sont :

III.4.1 Equation du mouvement

sur oy:
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow p=p(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

sur ox:
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

III.4.2 Equation d'énergie

$$\rho \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

III.5 Cas de la convection naturelle

Dans la convection naturelle, la force de poids ($\rho F_x=-\rho g$) et ($\rho F_y=0$), on considère que ox est l'axe verticale. (fig.3)

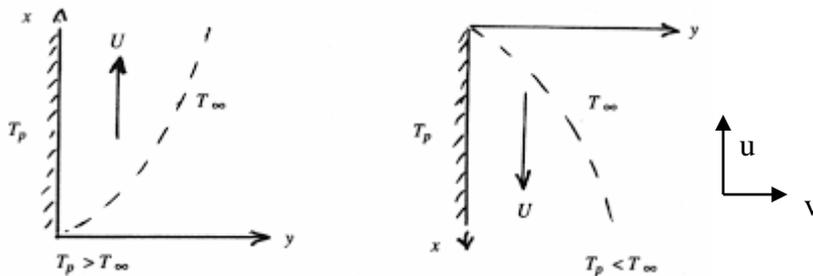


Fig.3 couche limite (convection naturelle)

إذا كانت درجة حرارة الصفيحة T_p أكبر من درجة حرارة المائع عندئذ فإن كثافة المائع تقل وبالتالي يصعد نحو الأعلى وفي الحالة المعاكسة فإن المائع ينزل نحو الأسفل بازدياد كثافته .

Si la température de la plaque T_p est supérieure à la température du fluide, dans cas là , la densité volumique du fluide diminué et donc le fluide monte vers le haut , et dans le cas contraire le fluide descend vers le bas de l'effet de l'augmentation de sa densité.

III.5.1 Equation du mouvement

$$\text{sur } ox: \quad \rho_o \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} - \rho g + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Dans la convection naturelle, le terme ρg est remplacé par :

$$\rho_o [1 - \beta(T - T_o)] \cdot g \quad (\text{approximation de Boussinesq})$$

$$\text{sur } oy: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

III.5.2 Equation de l'énergie

$$\rho_o \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$