1 Les trois théorèmes d'isomorphismes

Les théorèmes d'isomorphisme ont pour but de décrire la structure et les propriétés générales des morphismes de groupes. Ils en donnent des décompositions canoniques.

Théorème: (Premier théorème d'isomorphisme)

Soit G un groupe, $N \lhd G$ et $\pi : G \longrightarrow G/N$ la surjection canonique. Si $\theta : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes tel que $N \subseteq ker\,(\theta)$, alors il existe un unique morphisme $\varphi : G/N \longrightarrow G'$ tel que $\theta = \varphi \circ \pi$.

Preuve:

L'existence: on débute en montrant que la fonction $\varphi : G/N \longrightarrow G^{'}$, définie par $\varphi\,(xN) = \theta\,(x)$ est bien définie. Autrement dit, si $xN = yN$ alors on veut vérifier que $\theta\,(x) = \theta\,(y)$, l'hypothèse implique que $x^{-1}yN = N$ et donc $x^{-1}y \in N \subseteq ker\,(\theta)$. Il s'ensuit que $\theta\left(x^{-1}y\right) = e_{G'}$. Puisque θ est un morphisme, il en découle que $(\theta\,(x))^{-1}\,\theta\,(y) = e_{G'}$, et donc $\theta\,(x) = \theta\,(y)$. La fonction φ est donc bien définie.

Pour le reste de l'énoncé du théorème, on montre que φ est un morphisme de groupes.

L'unicité: Soient φ et φ', tels que $\theta = \varphi \circ \pi = \varphi' \circ \pi$. Pour $x \in G$ on a $\theta\,(x) = \varphi \circ \pi\,(x) = \varphi' \circ \pi\,(x)$ donc $\varphi\,(\pi\,(x)) = \varphi'\,(\pi\,(x))$. Alors pour $xN \in G/N$ on a $\varphi\,(xN) = \varphi'\,(xN)$ et donc $\varphi = \varphi'$.

Corollaire 1:

1. si $N = ker\,(\theta)$ alors φ est injectif.
2. si θ est surjective, alors φ l'est aussi.

Plus spécifiquement, si θ est surjective, et $N = ker\,(\theta)$, alors φ est un isomorphisme.

Corollaire 2:

Si $\theta : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors $G/ker\,(\theta) \simeq Im\,(\theta)$.

Si G est fini on a $|G| = |ker\,(\theta)\,| \times |Im\,(\theta)\,|$.

Exemples:

1. On a $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \oplus) \simeq (\mathbb{R}, +)$ En effet, $\mathbb{R} \lhd \mathbb{C}$, car $(\mathbb{C}, +)$ est abélien. De plus, on a un morphisme surjectif de groupes $\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $\theta\,(a + ib) = b$. Son noyau est $ker\,(\theta) = \mathbb{R}$.

2. L'application $\theta : (R^{*}, \times) \longrightarrow (R^{*}, \times)$ définie par $\theta\,(x) = |x|$, est un homomorphisme des groupes. Puisque $ker\theta = \{-1, 1\}$ et $Im\theta = R^{*}_{+}$, On a $R^{*}/\{-1, 1\} \simeq R^{*}_{+}$.

3. On pose $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $\left(G^{'}, \cdot\right) = (\langle i \rangle, \times) = (\{1, -1, i, -i\}, \times) \leq (\mathbb{C}^{*}, \times)$ alors

$$\theta : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{1, -1, i, -i\}, \times)$$

définie par $\theta\,(n) = i^{n}$. θ est surjectif et $ker\,(\theta) = 4\mathbb{Z}$. Alors en applique le premier théoréme d'isomorphisme

$$G/ker\theta \simeq Im\,(\theta) \iff (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \oplus) \simeq (\{1, -1, i, -i\}, \times)$$

4. Considerons le groupe general lineaire de degre n sur le corps $\Bbbk$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes dans le groupe multiplicatif du corps $det : GL_n \longrightarrow K^*$

Le noyau est exactement le groupe special lineaire, $Ker\,(det) = SL_n$, et on deduit que $k^* \cong GL_n/SL_n$.

5. Soit n un nombre naturel non nul. On a un homomorphisme de groupes $f_n : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$, $f_n(x) = e^{\frac{2\pi x}{n} i}$, Le noyau est $Ker\,(f_n) = n\mathbb{Z}$ et l'image $Imf = C_n$.

Finalement on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$.

Lemme:

Soit H un sous-groupe et N un sous-groupe normal d'un groupe G . Alors, $\langle H \cup N \rangle = HN = NH$.

Théorème: (Deuxieme théoréme d'isomorphisme).

Soient H un sous-groupe et N un sous-groupe normal d'un groupe G. Alors,

1. N est un sous-groupe normal de HN.
2. $H \cap N$ est un sous-groupe normal de H.
3. $H/(N \cap H) \cong HN/N$.

Preuve:

1. Grâce au Lemme précédent on sait que $HN = \langle H \cup N \rangle$ est un sous-groupe de G qui contient N. Comme N est un sous-groupe normal de G, N est clairement un sous-groupe normal de HN.

2. On considère l'application $f : H \longrightarrow HN/N$, $f(h) = hN$. Vérifions que f est un homomorphisme de groupes . Pour

$$h_1, h_2 \in H, f(h_1)f(h_2) = (h_1N)(h_2N) = (h_1h_2)N = f(h_1h_2)$$

De plus ,$h \in Kerf$ ssi $hN = N$, c'est-à-dire $h \in N$. Donc $Kerf = N \cap H$ et en particulier, $N \cap H$ est sous-groupe normale de H.

3. Considérons de nouveau le morphisme $f : H \longrightarrow HN/N$, $f(h) = hN$. Comme pour tous $h \in H$ et $n \in N$, $hnN = hN$, il suit que f est surjective. Le premier théorème d'isomorphisme nous dit alors que $H/(N \cap H) \cong HN/N$.

Exemple:

Considérons le groupe additif $G = Z$, $H = 9Z$ et $K = 12Z$. Alors, $H + K = 3Z$, $H \cap K = 36Z$ et ainsi $(3Z)/(9Z) \simeq (12Z)/(36Z)$.

1. **Corollaire:**

Si G est fini, alors $|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$.

Preuve:

Du point (3.) on déduit que

$$[H : (H \cap N)] = [HN : N]$$

Alors

$$\frac{\mid H \mid}{\mid H \cap N \mid} = \frac{\mid HN \mid}{\mid N \mid}$$

et dés lors

$$| HN |= \frac{| H || N |}{| H \cap N |}.$$

Théorème: (Troisieme théoréme d'isomorphisme).
Soient H et N des sous groupes normaux d'un groupe G et NH, alors
1. H/N est un sous-groupe normal de G/N
2. $(G/N)/(H/N) \cong G/H$
Preuve:

1. 1. Définissons une application $\psi : G/N \longrightarrow G/H$, $\psi(gN) = gH$. On peut facilement vérifier que est bien défini et est un morphisme surjectif de groupes.
   En outre, $gN \in Ker\psi$ ssi $\psi(gN) = gH = H$ c'est- a-dire $g \in H$. Donc $Ker\psi = \{gN, g \in H\} = H/N$ et en particulier H/N est un sous-groupe normal de G/N.

   2. Si on applique le premier théoréme d'isomorphisme au morphisme ψ on obtient immédiament $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.