Astrophysique et Cosmologie

1. Partie I : Astrophysique
   - 10 heures CM
   - 10 heures TD
   - Instructeur : Professeur Yann Le Grand
2. Partie II : Théorie de Relativité de gravitation (Relativité Génerale)
   - 10 heures CM
   - 10 heures TD
   - Instructeur : MC Robert Scott (moi même)
3. Partie III : Cosmologie
   - 10 heures CM
   - 10 heures TD
   - Instructeur : Professeur Richard Tweed

Résumé du cours d'aujourd'hui

- Introduction à la relativité générale (RG) – qu'est-ce-que c'est ?
- Renseignements pratiques : quelques manuels scolaires.
- Nouveaux concepts de la Relativité Restreinte (RR).
- Les outils de Relativité Restreinte
  - geometrie newtonienne – rappel des transformations de Galilée
  - transformations de Lorentz
  - géométrie lorentzienne où minkowskienne (espace-temps)

Introduction à la relativité générale, RG

- RG est une théorie de la gravitation qui est plus générale que celle de Newton mais qui approche celle de Newton dans la limite de champ de gravitation faible.
- Rappel : d'après Newton, une masse, m, produit un champ de gravitation ϕ donné par cette expression

$$\begin{aligned} \phi &= -G_0 \frac{m}{r} \\ \vec{g} &= -\nabla \phi \\ &= -G_0 \, \frac{m}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \tag{1}$$

  où $\vec{g}$ est l'accélération dans un champ de gravitation à cause de la masse m, à une distance r du centre de la masse, et $\hat{r}$ est un vecteur de grandeur unité dans la direction radiale de la masse, et G_0 est une constante.

- Remarquez que l'accélération $\vec{g}$ est un vecteur. Cela veux dire que cette règle est indépendante de l'orientation de notre référentiel.
- Nous remplacerons les équations vectorielles ci-dessus avec les équations du champ gravitationnel d'Einstein :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R = -\kappa T_{\alpha\beta} \tag{2}$$

  où $G_{\alpha\beta}$ est le *tenseur d'Einstein*, $R_{\alpha\beta}$ et R sont reliés à la courbure de l'espace, et $T_{\alpha\beta}$ est le *tenseur énergie-impulsion*, et κ est une constante.
- Clairement nous avons besoin de comprendre les tenseurs, et comment faire du calcul différentiel avec les tenseurs : nous passerons 2 leçons pour apprendre ça. D'abord, nous devons apprendre un peu de relativité restreinte, c'est à dire la physique dans « l'espace-temps plate », sans courbure.

Manuels scolaires

Nous utiliserons les livres :
– *Hobson et al.* (2010) ci-après HEL
– *Hladik* (2006)
– *Barrau and Grain* (2011)
Tous les trois sont disponible dans la bibliothèque, mais il y a seulement un version de chaque un.

J'aime beaucoup le livre en anglais par *Schutz* (2009). Il n'est pas disponible dans la bibliothèque.

Très utile aussi est la *Dictionnaire de physique* par Richard Taillet et al. aussi disponible dans la bibliothèque.

Nouveaux concepts de Relativité Restreinte, RR

- RR est une théorie simple, où tous les résultats découlent d'une seule idée simple : la vitesse de la lumière dans le vide est égale à une constante c indépendante du référentiel.
- Bien entendu c'est une idée contre-intuitive avec des implications subtiles.
- L'idée d'un espace Euclidien en 3 dimensions à un instant de temps ce n'est pas bien défini, car celle varie avec le référentiel.
- Rappel : dans un espace Euclidien 3D, la distance Δl entre deux points est indépendante du référentiel

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{3}$$

- Puisque la vitesse de la lumière c est constante, en RR nous avons par contre que l'intervalle défini par

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{4}$$

est indépendant du référentiel.

– La vitesse de la lumière dans le vide est un résultat des équations d'électromagnétiques. Donc elle doit être constante par le principe de relativité. Il stipule que les lois de la physique peuvent s'écrire sous la même forme dans tous les référentiels inertiels.

Les outils de la Relativité Restreinte

- Considérons deux observateurs qui se déplacent l'un par rapport à l'autre à une vitesse constante v. Ils font des observations dans leurs référentiels inertiels cartésiens S et S'.
- Pour simplifier les calculs : à temps égal zéro dans les deux référentiels, $t = t' = 0$, les origines des deux référentiels sont à la mêmes place et les trois axes x, y, z and x', y', z' sont aligné.
- Les axes x et x' sont dans la direction du déplacement.
- Dans la physique newtonienne (c'est-a-dire espace Euclidien 3D avec temps absolu), les coordonnées d'événements dans le référentiel S' sont reliées a ses coordonnées dans le référentiel S

par une transformation de Galilée :

$$
\begin{aligned}
t' &= t, \\
x' &= x - v\,t, \\
y' &= y, \\
z' &= z.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

– On peut dire que ça implique une *géométrie newtonienne*, c'est-a-dire espace Euclidien 3D avec temps absolu *i.e.* le même temps dans tous référentiels ($t = t'$). Il n'y a pas un espace absolu car celui varie avec le référentiel ($x \neq x'$), et tous référentiels inertiels sont valides.

Transformations de Lorentz

– Dans la RR, les coordonnées d'événements dans le référentiel S' sont reliées à ses coordonnées dans le référentiel S par une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\,\gamma x, \\ x' &= -\beta\,\gamma ct + \gamma\,x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{6}$$

où,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c}, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

– On peut dire que ça implique une *géométrie lorentzienne*, c'est un espace-temps 4D. Il n'y a plus de temps absolu car ce n'est plus le même temps dans tous référentiels ($t \neq t'$).
– Remarquons la symétrie entre $c\,t$ et x dans (6). L'axe des $c\,t$ est comme un axe d'espace.
– Remarquons que (6) s'identifie à la transformation galiléenne pour de faibles vitesses $|v| \ll c$:

$$\begin{aligned} \beta &\to 0 \\ \gamma &\to 1 \end{aligned} \tag{8}$$

La dérivation de transformation de Lorentz

– La transformation de Lorentz est la transformation linéaire qui conserve l'intervalle (au carré) Δs^2 invariant, voir § 1.1 de (*Hobson et al.*, 2010), ci-après HEL, ou plus en détail § 2.1 de (*Barrau and Grain*, 2011).

– Les axes y et y' sont toujours alignés et z et z' sont toujours alignés. Donc $y = y'$ et $z = z'$. Donc nous pouvons commencer avec une transformation de la forme :

$$t' = A\,t + B\,x,$$
$$x' = D\,t + E\,x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z. \tag{9}$$

– Rappelez-vous que S' est en mouvement le long de l'axe des x de S à vitesse constante v. Donc, par définition l'événement $x' = 0$ correspond à

$$x = v\,t.$$

Avec (9) on déduit que

$$D = -E\,v.$$

TD : Montrez-vous ci-dessus.

– Par la symétrie, on déduit que l'événement $x = 0$ correspond à

$$x' = -v\, t',$$

et avec (9) on déduit que

$$D = -A\, v.$$

TD : Montrez-vous ci-dessus.

– Donc $A = E$ et (9) deviennent :

$$\begin{aligned} t' &= A\, t + B\, x, \\ x' &= -vA\, t + A\, x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{10}$$

Voir Eq. (1.1) de HEL.

– Si $A = 1$ et $B = 0$ nous avons les transformations de Galilée. Jusqu'à maintenant, nous n'avons toujours pas utiliser les idées nouvelle de RR.

– Mais dans RR, nous devons avoir le même intervalle $\Delta S^2 = \Delta S'^2$. Pour simplifier les calculs, considérons l'intervalle de l'origine de S $(t = x = y = z = 0)$ à $(t, x = y = z = 0)$. C'est simplement deux tic-tacs d'une horloge à l'origine de S. Par rapport à S, l'intervalle aux carré est simplement,

$$\Delta S^2 = c^2\, t^2 .$$

– TD : Trouvez-vous $\Delta S'^2$, *i.e.* l'intervalle par rapport à S'.

Dérivation de la transformation de Lorentz

– Elle est :

$$\begin{aligned}
\Delta S'^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
&= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \qquad \text{car } \; y' = 0, z' = 0 \\
&= c^2 (A\,t + B\,x)^2 - (-vA\,t + A\,x)^2, \qquad \text{par (10)} \\
&= c^2 (A\,t)^2 - (-vA\,t)^2 \qquad \text{car } \; x = 0 \\
&= c^2\, t^2\, A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= \Delta S^2 = c^2\, t^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$

– TD : Ça implique quoi de A ?

Dérivation de la transformation de Lorentz

– Donc,

$$A^2 = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} = \frac{1}{(1-\beta^2)}$$
$$A = \gamma \tag{12}$$

– Nous trouvons

$$B = \frac{\beta}{c}\gamma$$

en considérant l'intervalle de l'origine de S $(t = x = y = z = 0)$ à $(t = 0, x, y = z = 0)$ et en exigeant l'intervalle $\Delta S^2 = \Delta S'^2$.

$$
\begin{aligned}
c\,t' &= \gamma\,c\,t - \beta\,\gamma\,x,\\
x' &= -\beta\,\gamma\,c\,t + \gamma\,x,\\
y' &= y,\\
z' &= z.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Conséquences de la transformation de Lorentz

- L'axe des $(c\,t)$ est comme un axe d'espace et il n'y a plus de temps absolu car ce n'est plus le même temps dans tous les référentiels. Le temps et l'espace sont liés.
- La masse d'une particule en déplacement augmente.
- Il y a une vitesse maximale, c'est la vitesse de la lumière dans le vide c.
- Les horloges en déplacement se ralentissent.
- Les mètres en déplacement se contractent.

La masse et l'énergie

– L'équation fondamentale de la physique newtonienne qui relie la masse m, son accélération a, et la force F,

$$F = m\,a$$

est valable dans tous les référentiel inertiels, parce que léquation $F = m\,a$ est un invariant Galiléen.

– Mais $F = m\,a$ n'est pas invariant dans une transformation de Lorentz.

– Dans les cours de RR, on trouve une version relativiste de l'équation en recherchant une équation qui est invariante par la transformation de Lorentz et qui se réduit à $F = m\,a$ dans la limite de $\beta \ll 1$.

– Les mathématiques sont élémentaires, et ne prennet que quelques pages, voir (*Eisberg and Resnick*, 1985, Annexe A). Mais elle n'est pas directement notre préoccupation ici.

- Deux résultats clé pour nous sont :
  - la masse relativiste $I(v)$ (ou *coefficient d'inertie*) est une fonction de la vitesse et la masse au repose, m :

$$I(v) = \gamma\, m$$

  - L'énergie totale relativiste E et I sont liées par l'équation :

$$E = I\, c^2 = \gamma\, m\, c^2 \tag{14}$$

- C'est clair que $I \to \infty$ quand $\beta \to 1$. Donc la vitesse $v = c$ (donc $\beta = 1$) est une vitesse maximale. C'est impossible d'accélérer une particule plus vite que c.

Temps propre et durée propre

- Considérons une horloge qui est fixe dans S', à l'origine par example.
- Pendant le temps dt par rapport à S, l'horloge se déplace d'une distance dl telle que :

  $$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (vdt)^2.$$

  Et donc l'intervalle est

  $$ds^2 = c^2\, dt^2 - dl^2 = (c^2 - v^2)\, dt^2$$

- Par rapport à S', l'intervalle est simplement

  $$ds'^2 = c^2\, dt'^2$$

- Et, comme nous avons dit, le principe à la base de RR,

$ds'^2 = ds^2$, implique donc

$$dt' = \frac{dt}{\gamma}$$

– Parce que $\gamma \geq 1$, nous remarquons que

$$dt' \leq dt$$

C'est-a-dire que *les horloges en déplacement se ralentissent.*

– Le temps mesuré par une horloge qui se déplace avec une particule s'appelle *temps propre*. Nous le notons par τ, une notation standard. La durée de temps propre, $d\tau$, s'appelle *durée propre* :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{15}$$

(*Hladik*, 2006, Eqn. (1.2.3)).

Les longueurs se contractent

– Avec la transformation de Lorentz on trouve qu'un objet de longueur l_0 par rapport au référentiel où il est au repos, a un longueur

$$l' = \frac{l_0}{\gamma}$$

par rapport au référentiel en mouvement v.

Les quadrivecteurs

– Regardez-vous encore l'équation (4) :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{16}$$

– Elle est de la même forme de l'intervalle classique d'espace euclidien

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{17}$$

sauf pour les constantes qui multiplient les termes.

– L'intervalle ds^2 de RR est comme une distance mais dans un espace de quatre dimensions et une métrique un peu bizarre. Nous explorerons cette métrique.

Métrique de l'espace-temps de la RR

Voyons (*Hladik*, 2006, Chapitre 1.4) (mais nous utilisons les indice plutôt que les exposants pour être en accord avec (*Hobson et al.*, 2010)).

– Nous définissons les quatre variables suivant :

$$\begin{aligned} x^0 &= c\,t \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \tag{18}$$

– x^μ désigne l'une quelconque de ces quatre coordonnées. Par la suite, les indices grecs prendront toujours des valeurs de 0 à 3. On peut utiliser une autre lettre grecque, $x^\alpha, x^\beta, \ldots$ ou x^ν. Mais

π n'est pas une bonne idée parce que on pense toujours à la constant $3.14159\ldots$. Et δ n'est pas une bonne idée pour une autre raison.

– Si nous voulons désigner seulement les coordonnées spatiales, nous utilisons les indices latin $i, j, k, \ldots$ qui prendront toujours des valeurs de 1 à 3. Donc, x^i désigne l'une quelconque des coordonnées spatiales.

Quadrivecteurs

Voyons (*Hladik*, 2006, Chapitre 1.4.1)

– Un événement dans notre espace-temps 4D est trouver à un point x^μ (c'est-a-dire (x^0, x^1, x^2, x^3)). Ce point peut être considérées comme les composantes d'un vecteur de quatre dimensions

$$\mathbf{R} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

appelé *rayon-vecteur*.

– Les composantes d'un rayon-vecteur se transforment selon la transformation de Lorentz (13).

– Nous appellerons « un quadrivecteur » chaque ensemble de quatre quantités a^α (c'est-a-dire (a^0, a^1, a^2, a^3)) qui se transforment comme un rayon-vecteur lors d'un changement de référentiel d'inertie.

- Les quadrivecteurs sont des vecteurs à quatre dimensions qui sont *covariants*. Au prochain cours nous définirons les quadrivecteurs *contravariants.*
- Un quadrivecteur important est le *quadrivecteur vitesse unitaire* ou *quadrivitesse unitaire*. Il est definié par

$$u_\alpha \equiv \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Utilisons (15), ($\gamma d\tau = dt$), nous trouvons,

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \\ &= \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\alpha}{dt} \\ &= \frac{\gamma}{c}\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) \\ &= \frac{\gamma}{c}\left(c\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ &= \left(\gamma, \frac{\gamma}{c}v_x, \frac{\gamma}{c}v_y, \frac{\gamma}{c}v_z\right) \end{aligned} \tag{19}$$

ou $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ est la vitesse habituelle.

– Il y a un quadrivecteur pour l'impulsion-énergie aussi, c'est $\mathbf{P}$, ou

$$\mathbf{P} = m\,c^2\,u_\alpha \tag{20}$$

(*Hladik*, 2006, Eq. (1.5.3)).

– La première composante de $\mathbf{P}$ est l'énergie totale relativiste E du corps :

$$P_0 = m\,c^2\,u_0 = \gamma\,m\,c^2 = I c^2, \qquad \text{en utilisant (14).}$$

– TD : C'est aisé de montre que la norme du quadrivecteur impulsion-énergie est $m\,c^2$.

Produit scalaire

Voyons (*Hladik*, 2006, Chapitre 1.4.2)

- L'intervalle classique d'espace euclidien (17) a la forme du produit scalaire de la différence entre deux vecteurs de position

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{21}$$

  qui est invariante avec l'orientation des axes cartesiens.
- L'intervalle Δs^2 de RR est aussi le produit scalaire de la différence entre deux rayon-vecteurs x^α et x^α :

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= (x^\alpha - x^\alpha)^2 \\ &= (x^0 - x^0)^2 - (x^1 - x^1)^2 - (x^2 - x^2)^2 - (x^3 - x^3)^2 \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \end{aligned} \tag{22}$$

qui est invariante avec le référentiel d'inertie.

– Donc nous définissons un produit scalaire entre deux quadrivecteurs $\mathbf{A} = \mathbf{a}^\mu$ and $\mathbf{B} = \mathbf{b}^\nu$ de notre espace-temps :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^0\, b^0 - a^1\, b^1 - a^2\, b^2 - a^3\, b^3 \tag{23}$$

– L'espace-vectoriel ainsi muni d'un tel produit scalaire est un espace préhilbertien ou un espace pseudo-euclidien.

Espace-temps de Poincaré-Minkowski & le tenseur métrique

Voyons (*Hladik*, 2006, Chapitre 1.4.3, 1.4.4)

– On peut écrire plus généralement le produit scalaire entre deux quadrivecteurs $\mathbf{A} = a^\alpha$ et $\mathbf{B} = b^\beta$ comme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, b^\beta \\ &= g_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, b^\beta \qquad (24) \end{aligned}$$

où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique, une propriété tres importante de l'espace vectoriel.

– Dans la deuxième ligne nous avons utilisé la convention d'Einstein : quand les mêmes deux indices apparaissent dans le même terme, nous devons faire la sommation sur les quatre indices (il y a une somme implicite $\sum$). Normalement, un de les deux indices est un exposant (en haute) et l'autre est un vrais indice (en bas).

– Le tenseur métrique de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski est

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ou

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

– $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ applique pour RR, où il n'y a pas de masse et l'espace-temps est plat.
– Nous verrons que quand il y aura des masse importante, l'espace-temps deviendra courbe, et un autre $g_{\alpha\beta}$ s'appliquera.

Lectures utiles pour approfondir ce cours

– Lisez le chapitre un de (*Hobson et al.*, 2010) et/ou
– Lisez le chapitre un de (*Hladik*, 2006).
– Pour la structure de l'espace-temps en RR écrit *en anglais* par un philosophe (mais avec une dérivation simple de la transformation de Lorentz), voyez (*Maudlin*, 2011, Chapitre 2).
– Pour une description brève *en anglais* de la RR voyez (*Eisberg and Resnick*, 1985, annexe A).

Qu'est-ce qui manque dans *Hladik* (2006) ?

- Demonstration de la transformation de Lorentz
- Diagrammes d'espace-temps
- Contraction des longueurs
- Hyperbole invariante
- Élément de longueur de l'espace-temps de Minkowski
- Lignes d'univers des particules
- Effet Doppler [c'est dans l'exercice].
- Accélération en RR [c'est l'acceleration uniforme]
- Horizon des événement

Références

Barrau, A., and J. Grain (2011), *Relativité Générale : Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris.

Eisberg, R., and R. Resnick (1985), *Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*, 2nd ed., 713 pp., John Wiley and Sons, New York, 713 + XIII pp.

Hladik, J. (2006), *Introduction à la Relativité Générale*, Ellipses, Paris.

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Maudlin, T. (2011), *Quantum Non-Locality and Relativity*, third ed., Oxford : Blackwell, Oxford, UK.

Schutz, B. (2009), *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge UK.