Cours 2. Variétés, géométrie des variétés, et le tenseur métrique

Résumé du cours de aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur la Relativité Restreinte.
- Qu'est-ce-que c'est une variété ?
- Dimensions et coordonnées sur une variété.
- Géométrie des variétés – le tenseur métrique.
- Convention de sommation.
- variétés pseudo-riemanniennes.
- Tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski

Résumé du dernier cours sur la Relativité Restreinte, RR

- RR est une théorie de la structure de l'espace et temps « l'espace-temps » qui s'applique quand il n'y a pas de masse importante dans le lieu.
- L'espace-temps de RR remplace celui implicite dans la physique newtonienne, c'est-a-dire l'espace euclidien et le temps absolu.
- L'espace-temps de RR est plat et permet l'utilisation d'un référentiel pseudo-cartésien global (nous verrons en GR les référentiel pseudo-cartésien ne s'appliquent que localement car l'espace-temps deviens courbe).
- L'universalité de la vitesse de la luminère dans le vide entraîne tous resultas de RR.

– Immédiatement on a l'intervalle,

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

entre deux événements d'espace-temps est constant (c'est-a-dire il ne change pas avec changement du référentiel inertiel).

– Avec un petit peu d'algèbre on trouve la transformation de Lorentz (qui remplace celle de Galilee) avec laquelle l'intervalle Δs^2 est constant.

– Dans la RR, les coordonnées d'événements dans le référentiel S' sont reliées à ses coordonnées dans le référentiel S par une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\,\gamma x, \\ x' &= -\beta\,\gamma ct + \gamma\,x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

où,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c}, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

– Et avec un petit plus d'algèbre on trouve les résultats principaux de RR.

Résumé du cours de aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur la Relativité Restreinte. ✓
- Qu'est-ce-que c'est une variété ?
- Dimension et coordonnées sur une variété.
- Géométries des variétés – le tenseur métrique.
- Convention de sommation.
- variétés pseudo-riemanniennes.
- Tenseur métrique d'espace-temps de Minkowski

Qu'est-ce-que c'est une variété ?

- Une variété est un objet mathématique générale, c'est un ensemble des points avec des fonctions qui relient les points avec des coordonnées en $\mathbb{R}^N$.
- L'espace-temps 4D de RR est un exemple d'une variété en 4 dimensions, dit de Minkowski.
- La relativité générale introduits les espaces géométriques plus complexes qui sont également des variétés.
- Une variété est continue si dans le voisinage du chaque point P il y a des points dont les coordonnées sont infinitésimalement proche de celles de P.
- Une variété est différentiable si on peut définir un champ scalaire à chaque point et si on peut le différentiater partout.

Dimension et coordonnées sur une variété

- La dimension N d'une variété est le nombre de parameters nécessaire pour specifier un point unique sur la variété.
- Les N parameters, $x^1, x^2, \ldots, x^N$ sont les coordonées d'un point P de la variété. Nous écrirons x^a où il est sous-entendu que $a = 1, 2, \ldots N$. (Les indices a sont des exposants ; ne confondez pas avec la puissance.)
- Pour nous, d'habitude $N = 4$, et nous écrirons x^μ, où les lettres grecques prennent les valeurs $\mu = 0, 1, 2, 3$, pour notre

espace-temps quadridimennsional

$$\begin{aligned} c\,t &= x^0 \\ x &= x^1 \\ y &= x^2 \\ z &= x^3 \end{aligned} \tag{3}$$

- Pour quelque système de coordonnées, il y a des points où il n'y a pas des coordonnées unique. Par exemple, pour la variété simple du plan en 2 dimension, $\mathbb{R}^2$, avec le système de coordonnées polaires (r, θ), l'origine est dégénéré. (La valeur de θ n'est pas unique.)
- Bien entendu pour cet exemple on peut éviter le problème par utilisant le système de coordonnées cartésiennes. C'est juste une dégénérescene de coordonnées. Mais il y a des variétés pour laquelle il n'y a pas un seul système de coordonnées

non-dégénéré. Un exemple simple c'est la surface d'une sphère où, avec les coordonnées latitude et longitude (ϕ, θ) les deux pôles ($\phi = \pi/2$ et $\phi = -\pi/2$) sont dégénérés. La solution est d'utiliser un système de coordonnées non-dégénéré locale.

La géométrie d'une variété

- C'est la fonction qui donne, en chaque point de la variété, la distance infinitésimale séparant ce point de ses proches voisins qui détermine la géométrie locale de la variété.
- Pour un point P d'une variété, avec les coordonnées x^a, considérons un point Q infinitésimalement proches de P, de coordonnées $x^a + dx^a$. La distance ou intervalle carré ds^2 qui sépare P et Q est en générale donnée par la fonction

  $$ds^2 = f(x^a, dx^a),$$

  et cette relation détermine la géométrie locale de la variété à point P.
- La distance carrée, ds^2, est invariante sous un changement de coordonnées. Par exemple, pour la variété d'un plan en deux

dimensions d'espace euclidien, la distance entre P et un point Q infinitésimalement proche de P, est la même en coordonnées cartésiennes $x^a = (x, y)$ et coordonnées polaires $x^a = (r, \theta)$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$$

– Et rappelez-vous que dans l'espace-temps de Minkowski, l'intervalle de RR est :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \\ &= (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2, \qquad \text{utilissant (3)} \end{aligned} \tag{4}$$

– La fonction qui donne l'intervalle dépend à la fois de la géométrie locale de la variété au point P *et* du système de coordonnées choisi. Cependant, c'est claire que la géométrie de l'espace-temps de Minkowski est différente que celle d'une variété dans l'espace euclidien parce qu'il n'y a pas un changement de coordonnées qui donne la même fonction pour l'intervalle.

Le tenseur métrique

– Pour RG, nous n'avons besoin que des variétés avec géométrie dont la fonction qui donne l'intervalle au point P est de la forme :

$$ds^2(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^{N}\sum_{a=1}^{N} g_{ab}(\mathbf{x})\, dx^a\, dx^b \tag{5}$$

où $\mathbf{x} = x^c$ est les coordonnées du point P.

– $g_{ab}(\mathbf{x})$ sont les composantes du *tenseur métrique*. (Dans le quatrième cours nous parlerons beaucoup de tenseurs. Aujourd'hui pensez de g_{ab} comme une fonction d'espace avec $N \times N$ composantes qui détermine la géométrie locale à chaque point P de la variété.

Convention de sommation

– Pour le calcul tensorielle nous devons souvent faire des sommes, comme dans (5).

– Donc, nous utilisons la *convention de sommation* : quand il y a un indice répétés dans un même monôme une fois en bas et une fois en haut, il y a une sommation implicite sur toutes les (N) valeurs possibles de cet indice. Par exemple,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{b=1}^{N} \sum_{a=1}^{N} g_{ab}(\mathbf{x})\, dx^a\, dx^b \\ &= g_{ab}(\mathbf{x})\, dx^a\, dx^b \qquad (6) \end{aligned}$$

– Nous disons que a et b sont des indices muets.

– Un indice non-muet est un indice libre. Par exemple, quand nous disons $\mathbf{x} = x^c$, l'indice c est libre et il peut prendre toute N

valeur possible.

Variété Riemannienne et pseudo-Riemannienne

- En RG, nous avons besoin des variétés avec l'intervalle donné par l'expression (5)

$$ds^2(\mathbf{x}) = g_{ab}(\mathbf{x})\, dx^a\, dx^b \tag{7}$$

  et donc ds^2 a il n'importe quel signe. Elles sont nommées *variétés pseudo-Riemanniennes.*
- Dans le cas où l'intervalle est strictement positive dans (5), nous disons que les variétés sont Riemanniennes.
- Attention : Les physiciens sont notoirement peu soigné et parfois appel variétés de pseudo-Riemanniennes comme Riemanniennes.

Métrique de l'espace-temps de Minkowski

– Comparons l'intervalle générale d'une variété pseudo-Riemannienne (5) avec l'intervalle de RR (8) :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \\ &= (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2, \qquad \text{utilissant (3)} \end{aligned} \tag{8}$$

– TD : Qu'est-ce-que c'est le tenseur métrique d'espace-temps de Minkowski ?

Métrique de l'espace-temps de Minkowski

– Nous voyons que, pour l'espace-temps de Minkowski (l'espace-temps plat de RR) :

$$\begin{aligned} g_{00} &= +1 \\ g_{ii} &= -1, \qquad i > 0 \\ g_{\alpha\beta} &= 0, \qquad \alpha \neq \beta \end{aligned} \tag{9}$$

– Nous avons suivi la convention que les indices latin $i, j, k, \ldots$ prennent les valeurs $i = 1, 2, 3$, et les indices grèques $\alpha, \beta, \mu, \nu, \ldots$ prennent les valeurs $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

– Une autre convention : Le tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski est tel important qu'il a son propre lettre, $\eta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

– Nous pouvons écriver un tenseur comme le tenseur métrique comme une matrice,

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Coordonnées localement cartésiennes des variétés riemanniennes

- C'est plus facile de visualizer une variété riemanniennes comme la surface d'une sphère, donc nous allons discuter quelques idées très importantes pour ce cas. Par la suite nous appliquons ces idées aux variétés pseudo-riemanniennes quadridimensionnel.
- Il n'est pas toujours possible de trouver un changement de coordonnées x^a

Changement des coordonnées

- Nous avons vu que le tenseur métrique change quand nous changeons les systèmes des coordonnées (par exemple de cartésiennes à polaires).
- TD : Est-ce-que c'est possible de simplifier $g_{\alpha\beta}$? Comment ?

Est-ce-que c'est possible de simplifier $g_{\alpha\beta}$?

– Oui, c'est toujours possible *localement* dont

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

à un point donné, et proche de ce point

$$g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$$

– Mais, pourquoi donc étudier la RG ?! [Rappel : $\eta_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique d'espace-temps plat, de RR. RG est l'étude d'espace-temps courbe.]

Pourquoi donc étudier la RG ?

– Mais, globalement, s'il l'espace-temps n'est pas plat, nous ne pouvons pas trouver *un seul système* de coordonnées dont

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

à *tous les points*. Il faut changer les coordonnées a chaque point pour avoir $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ et il n'est pas pratique.

Note to self : Consider adding

- Curves and surfaces
- Coordinate transformations
- Intrinsic geometry
- Lengths, areas, volumes
- Local Cartesian coordinates
- Tangent spaces to manifolds

Références