Cours 3. Analyses vectoriels sur les variétés

Résumé du cours de aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur les variétés.
- Les champs des vecteurs sur les variétés.
- Les composantes covariantes et contravariantes.
- Quel que vecteurs importants en RR et RG.

Résumé du dernier cours sur les variétés

- Une variété est une espace des points (ex. les points de un plan ou la surface de une sphère), et nous localisons les points avec les paramètres ou coordonnées, x^a, où $a = 1, 2, \ldots N$, et N est la dimension de la variété. Les coordonnées et les fonctions qui relient chaque ensemble de coordonnées avec un point unique de la variété est le système de coordonnées (ex. coordonnées cartésiennes pour le plan ou latitude et longitude pour la surface de la sphère.)
- En 4 dimensions, nous écrivons les coordonnées comme x^μ, ou $\mu = 0, 1, 2, 3$ dont $x^0 = c\,t$ (c est la vitesse de la luminaire dans le vide, et t est temps).
- Nous utiliserons les variétés continues, et différentiable (on peux définir un champ scalaire sur la variété que l'on peux

différencier), et avec la géometrie pseudo-riemmannienne.

– La géometrie d'une variété est déterminé par la fonction, pour un système des coordonnées donnés, qui relie la distance entre deux points et les coordonnées. Pour les variétés pseudo-riemmannienne.

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

– $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique. C'est une matrice de 16 valeurs dont seulement 10 sont indépendents à cause de la symmétrie $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$.
– Nous pouvons changer le système de coordonnées (e.g. de cartésiennes à polaires) sans affecter les points ou la distance entres les points. (Mais évidement la fonction $g_{\alpha\beta}$ change avec le système coordonnées.)
– En l'espace euclidienne de 2 dimensions en coordonnées

cartésiennes, le tenseur métrique est

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \qquad (x^1 \equiv x, x^2 \equiv y)$$

– En RR, nous avons l'espace plat de Minkowski, ou $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$ et

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et c'est un peu comme l'espace euclidienne, donc nous disons pseudo-euclidienne.

– C'est toujours possible de changer le système de coordonnées dont

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{1}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{2}$$

– L'espace-temps resemble toujours *localement* l'espace de Minkowski. C'est un resultat très fondamental grace à la principe d'équivalence.

Les espaces vectoriels

- Rappelez-vous que nous avons besoin de comprendre les tenseurs, et comment faire du calcul différentiel avec les tenseurs.
- Les tenseurs sont une généralisation du vecteurs, donc nous commençons avec les espace vectoriels.
- Bien sûr, vous êtes familier avec le calcul vectoriel dans les espace euclidiens. Nous devons généraliser ces idées pour définir des vecteurs sur une variété pseudo-riemannienne.
- Les vecteurs sont des êtres de mathématiques qui représentent les quantités avec plusieurs composants indépendant
- Les vecteurs habitent dans un espace s'appelle un espace vectoriel. C'est-a-dire on peut construire les vecteurs avec une base de N vecteurs (où N est la dimension de l'espace vectoriel, pour nous $N = 4$ normalement) et un champs (pour nous le

champs des nombres réels) en faisant les combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x^0\,\mathbf{e}_0 + x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3 \\ &= x^\mu\,\mathbf{e}_\mu \end{aligned} \tag{3}$$

où $x^\mu \in \mathbb{R}$.

– Les axiomes d'un espace vectoriel exigent que, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = (a+b)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \tag{4}$$

– Quand nous changeons la base, les composants de **A** change, mais **A** ne change pas :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x^\mu\,\mathbf{e}_\mu \\ &= x'^\mu\,\mathbf{e}'_\mu, && \text{par definition d'un vecteur} \\ &= x^{\mu'}\,\mathbf{e}_{\mu'}, && \text{une notation abrégée pour la ligne précédente.} \end{aligned} \tag{5}$$

où $\mathbf{e}'_\mu$ (où plus souvent écrit $\mathbf{e}_{\mu'}$) est une autre base du même espace vectoriel.

Changement de base pour les vecteur contravariantes

Voyez (*Hladik*, 2006, §2.2.1)

– Pour chaque système des coordonnes, on peut définir une base. (Nous utiliserons toujours les base naturelles, obtenu par les vecteur tangents des lignes coordonnés, explique dans quelque minutes).
– La base $\mathbf{e}_{\mu'}$ est un ensemble de quatre vecteurs de l'espace vectoriel de $\mathbf{e}_\mu$ et donc nous pouvons écrire chacun par une combinaison linière comme :

$$\mathbf{e}'_0 = a\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Plus succinctement, on peut écrire,

$$\mathbf{e}_{\mu'} = A^{\alpha}{}_{\mu'}\,\mathbf{e}_{\alpha} \tag{6}$$

où $A^{\alpha}{}_{\mu'}$ est une matrice de 16 composantes, la matrice de transformation.

– Nous pouvons trouver la règle qui relie les composantes du même vecteur écrit avec les deux base :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= x^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu} \\ &= x^{\nu'}\,\mathbf{e}_{\nu'}, \qquad \text{voir (5)} \\ &= x^{\nu'}\,A^{\alpha}{}_{\nu'}\,\mathbf{e}_{\alpha}, \qquad \text{en utilisant (6)}\end{aligned} \tag{7}$$

– Remarquez que α est un indice muet, c'est-a-dire il est répété dans le même monôme, et donc il y a une sommation implicite sur toutes les (4) valeurs possibles de α.
– Et donc nous pouvons utiliser il n'importe quelle lettre grecque pour ça, et pour quoi pas μ ? Ce choix nous permet de voir

immédiatement que

$$x^{\mu} = x^{\nu'} A^{\mu}{}_{\nu'}$$

– Les vecteurs dont les composantes se transforment ainsi sont appelés des vecteur contravariants.

– On peut aussi écrire,

$$\mathbf{e}_{\mu} = A_{\mu}{}^{\nu'} \, \mathbf{e}_{\nu'} \tag{8}$$

– Qu'est-ce-que c'est la relation entre $A^{\alpha}{}_{\nu'}$ et $A_{\mu}{}^{\nu'}$? Ils sont des transformations inverses. Pourquoi ?

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mu} &= A_{\mu}{}^{\nu'} \, \mathbf{e}_{\nu'} && \text{utilisant (8)} \\ &= A_{\mu}{}^{\nu'} \, A^{\alpha}{}_{\nu'} \, \mathbf{e}_{\alpha} && \text{utilisant (6)} \end{aligned}$$

Mais les vecteur de base sont indépendent, donc

$$A_{\mu}{}^{\nu'} \, A^{\alpha}{}_{\nu'} = \delta^{\alpha}_{\mu}$$

– Nous pouvons trouver la autre règle qui relie les composantes du même vecteur écrit avec les deux base :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x^{\mu}\, \mathbf{e}_{\mu} \\ &= x^{\nu'}\, \mathbf{e}_{\nu'}, \qquad \text{voir (5)} \\ &= x^{\mu}\, A_{\mu}^{\ \nu'}\, \mathbf{e}_{\nu'}, \qquad \text{en utilisant (8)} \end{aligned} \tag{9}$$

– Donc,

$$x^{\mu'} = x^{\mu} A_{\mu}^{\ \mu'} \tag{10}$$

Résumé : composantes contravariantes

– Si les vecteurs de base sont relient par les deux matrices de transformation :

$$\mathbf{e}_{\mu'} = A^{\alpha}{}_{\mu'}\,\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\mathbf{e}_{\mu} = A_{\mu}{}^{\alpha'}\,\mathbf{e}_{\alpha'} \tag{11}$$

puis les matrices de transformation doivent être inverses :

$$A_{\mu}{}^{\nu'}\,A^{\alpha}{}_{\nu'} = \delta^{\alpha}_{\mu}$$

et les composantes contravariantes sont relient par

$$x^{\mu'} = x^{\mu}\,A_{\mu}{}^{\mu'} \tag{12}$$

$$x^{\mu} = x^{\nu'}\,A^{\mu}{}_{\nu'} \tag{13}$$

Comment obtenir les $\mathbf{e}_\alpha$?
Les bases naturelles

- Supposons nous avons un système de coordonnées, x^μ, pour une variété quadridimensionnel. Nous pouvons facilement définir les courbes, dites courbes ou lignes de coordonnées, fixant tout les coordonnées sauf qu'un seul, x^α (où ici α est fixe). Permettons x^α de changer avec temps-propre τ (ou un autre paramètre commode) :
- $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ est *la ligne de coordonnée*, et l'ensemble de 4 courbes (il y a 4 valeurs possibles de α) sont les 4 lignes de coordonnées dans la variété, voyez Fig. 3.4 de (*Hobson et al.*, 2010).
- Le vecteur tangent au point P de la variété à la ligne de coordonnée x^α nous donne un vecteur de base $\mathbf{e}_\alpha$.
- Comment obtenir un vecteur tangent ? à un point $\mathbf{x}(P)$ sur la

ligne de coordonnée, un point voisin Q situé sur la même ligne est à les coordonnées,

$$\mathbf{x}(Q) = \mathbf{x}(P) + \delta\mathbf{s}$$

où $\delta\mathbf{s}$ est le vecteur de déplacement infinitésimal séparant P et Q.

– Le vecteur tangent $\mathbf{e}_\alpha$ de la ligne coordonnée x^α au point P est

$$\mathbf{e}_\alpha = \lim_{\delta x^\alpha \to 0} \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta x^\alpha}$$

Comment obtenir la matrice de transformation $A^{\alpha}{}_{\mu'}$?

- Considérons deux points P et R voisins *pas forcement sur une ligne coordonnée*. Le vecteur de déplacement infinitésimal séparant P et R est $d\mathbf{s}$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_{\mu} dx^{\mu}$$

  Remarquez-vous que μ est ici un indice muet, et donc il y a une sommation implicite de 4 vecteur ci-dessus.

- Si nous changeons les coordonnées de x^{μ} à $x^{\mu'}$ nous changeons les vecteur de base de $\mathbf{e}_{\mu}$ à $\mathbf{e}_{\mu'}$, mais bien sûr nous ne changeons pas le vecteur de déplacement infinitésimal séparant P et R.

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_{\mu} dx^{\mu} = \mathbf{e}_{\mu'} dx^{\mu'} \tag{14}$$

– Les nouvelle coordonnées sont les 4 fonctions de coordonnées originale,

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu)$$

et nous supposons que les fonctions sont les bijections (sont de un à un) donc nous avons aussi

$$x^\mu = x^\mu(x^{\mu'})$$

– C'est un résultat du calcul différentiel que

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}$$

– Remplaçant ci-dessus dans (14) nous trouvons immédiatement

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \mathbf{e}_\mu = A^\mu{}_{\mu'} \mathbf{e}_\mu \tag{15}$$

Donc :

$$A^\mu{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$$

C'est très important, donc n'oubliez pas !

Les espaces duaux

- Pour un ensemble de vecteurs de base $\mathbf{e}_\mu$, nous pouvons toujours définir un second ensemble de vecteurs de base $\mathbf{e}^\nu$ par la relation

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}_\mu \equiv \delta^\nu_\mu &= 0 \qquad \text{quand } \mu \neq \nu \\ &= 1 \qquad \text{quand } \mu = \nu \end{aligned} \tag{16}$$

- $\mathbf{e}^\nu$ sont nommés l'ensemble de vecteurs de base *duaux* ou *duale.*
- Attention ! (*Hladik*, 2006, Section 2.2.2) parle de l'ensemble de vecteurs de base duale comme les composants des vecteurs contravariants, x^ν. Moi, je le trouve déroutant. *Hobson et al.* (2010, Section 3.4) sont très plus simple et claire.

– Nous pouvons écrire le même vecteur avec les deux bases,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= x^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu} \\ &= x_{\mu}\,\mathbf{e}^{\mu} \end{aligned} \tag{17}$$

ou x_{μ} sont les composantes covariantes. Dans quelque minutes nous allons voir pourquoi.

Les vecteur covariantes

- Pourquoi x_μ dite *composantes covariantes*?
- Comment les composantes covariantes se transforment quand nous changeons les coordonnées, et donc les base $\mathbf{e}_\mu$ et aussi les base duaux $\mathbf{e}^\mu$?
- Répétant les arguments ci-dessus, nous trouvons les résultats suivants :

Résumé : composantes covariantes

– Si les vecteurs de base sont relient par la matrice de transformation

$$\mathbf{e}_{\mu'} = A^{\alpha}{}_{\mu'}\,\mathbf{e}_{\alpha} \tag{18}$$

$$\mathbf{e}_{\mu} = A_{\mu}{}^{\alpha'}\,\mathbf{e}_{\alpha'} \qquad \text{avec,} \tag{19}$$

$$A_{\mu}{}^{\nu'}\,A^{\alpha}{}_{\nu'} = \delta^{\alpha}_{\mu} \tag{20}$$

puis les vecteurs de base duaux sont relient par

$$\mathbf{e}^{\mu'} = A_{\alpha}{}^{\mu'}\,\mathbf{e}^{\alpha}$$

$$\mathbf{e}^{\mu} = A^{\mu}{}_{\alpha'}\,\mathbf{e}^{\alpha'} \tag{21}$$

et les composantes contravariantes sont relient par

$$x_{\nu'} = x_\mu \, A^\mu{}_{\nu'} \tag{22}$$

$$x_\mu = x_{\nu'} \, A_\mu{}^{\nu'} \tag{23}$$

– Comparant (18) avec (22) [ou (19) avec (23)] nous voyons que les composantes covariantes se transforment comme les vecteur de base. (Mais d'après mois c'est une raison bête parce que les vecteurs de base duaux se transforme contra des composantes covariantes !)
– On voit aussi le terme « *one-form* » ou « une forme monolinéaire » pour vecteur covariant (*Misner et al.*, 1973; *Schutz*, 2009) ou `http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG2F.pdf`, et peut-être c'est mieux, mais nous suivons les livres de (*Hobson et al.*, 2010; *Hladik*, 2006).

Vecteurs importants en relativité

- En relativité (RR et RG) nous voulons généraliser la notion de vitesse en 3D Euclidien espace à celle de l'espace-temps de Minkowski en quatre dimensions où plus généralement de l'espace tangent d'une variété pseudo-riemannien en quatre dimensions.
- Rappelez-vous de cours 1 que nous définissons la quadrivitesse comme

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d}{d\tau}\left(x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}\right) \tag{24}$$

dont les composants contravariants, dans un espace-temps plat, sont données par

$$
\begin{aligned}
u^\mu \equiv \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{e}^\mu \cdot \frac{d}{d\tau}\left(x^\nu \mathbf{e}_\nu\right) \\
&= \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \frac{d}{d\tau}\left(x^\nu\right) \\
&= \delta^\mu_\nu \frac{d}{d\tau}\left(x^\nu\right) \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(x^\mu\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

- Rappelez-vous que le temps-propre était défini dans cours 1 comme :

$$
d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{26}
$$

- TD : Qu'est-ce-que c'est la grandeur de la vitesse carrée ?

$$
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu
$$

– TD : Écrivez la quadrivitesse en termes de la 3-vitesse (le vecteur vitesse usuel) et γ.

TD : solutions

TD : La grandeur carrée de la vitesse ?

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= g_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = \frac{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{d\tau d\tau}\\ &= \frac{ds^2}{d\tau^2}.\end{aligned} \tag{27}$$

Mais $c^2 d\tau^2 = ds^2$ parce que τ est, par définition, le temps mesuré par une horloge qui ce déplace avec une particule, la intervalle de laquelle est

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2 = c^2d\tau^2$$

Donc,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = c^2$$

Quadri-impulsion d'une particule massive

- Le quadrivecteur d'impulsion d'une particle de masse m_0 (c'est-a-dire la masse au repos, pas la masse relativiste), est défini simplement par

$$\mathbf{p} = m_0\,\mathbf{u}$$

- TD : Qu'est-ce-que c'est la grandeur de la quadri-impulsion carrée ?

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = g_{\mu\nu}\,p^\mu p^\nu$$

Références

Hladik, J. (2006), *Introduction à la Relativité Générale*, Ellipses, Paris.

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Misner, C. W., K. S. Thorne, and J. A. Wheeler (1973), *Gravitation*, W. H. Freeman and company, San Francisco.

Schutz, B. (2009), *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge UK.

Things I missed

- Scalar fields on manifolds (helpful not critical)
- Tangent space (could also have covered in Lecture 2 on manifolds)
- Raising and lower indices, connection of dot product and metric tensor (very important, but maybe cover in tensors lecture ?)
- Sections 3.8, 3.9, 3.10 (affine business, will need later when talking about geodesics !)
- Section 3.11 Geodesics
- Section 3.12 Covariant derivative of a vector ! ! ! !
- 3.13 Vector operators in component form ?
- Parallel transport ! ! ! (will need this to talk about curvature)
- 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 more on geodesics.