Cours 4. Calcul tensoriel sur une variété pseudo-riemannienne

Résumé du cours d'aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur le calcul vectoriel sur une variété pseudo-riemannienne.
- Qu'est-ce-que c'est un tenseur ?
- Les champs des tenseurs sur les variétés pseudo-riemanniennes.
- Les composantes covariantes et contravariantes.
- Dérivée covariante d'un vecteur et un tenseur
- Les symboles de Christoffel (ou la connexion affine)
- Exemple familier en deux dimensions

Résumé du dernier cours sur le calcul vectoriel sur une variété pseudo-riemannienne

– J'ai fait un erreur sérieuse ! J'ai dit que :

$$(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = (a + b)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \tag{1}$$

mais j'aurais du dire, si **A** et **B** sont des vecteurs, et a et b des nombres réels, alors

$$\mathbf{C} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} \tag{2}$$

est un vecteur aussi.

Pourquoi étudions-nous les tenseurs ?

- Il y a des grandeurs physiques plus générale que les vecteurs que nous devons utiliser. Par exemple, le tenseur métrique qui détermine la géometrie d'une variété, et le tenseur de Riemann qui décrit la courbure.
- Comme les vecteurs généraliser le concept de scalaire, les tenseurs généraliser le concept de vecteur.
- On peut *naïvement* demander, « mais un vecteur $\vec{A}$, dans 2 dimensions, a deux composants $\vec{A} = (u, v)$. Donc, je peux parler simplement des deux scalaires u et v, sans introduire le concept de vecteur ! »
- Mais, c'est un erreur grave parce que en faisant une changement des coordonnées comme une rotation, les composants u et v changent aussi malgré le vecteur est le même. En revanche les

scalaires ne changent pas.

- Donc le concept d'un vecteur est essentiel pour exprimer les grandeurs comme vitesse, accélération, etc.
- Également, les tenseur sont essentiel pour exprimer les autres grandeurs plus riches que les vecteurs.
- TD : La masse est un scalaire dans la théorie newtonienne, et est invariante sur la transformation de Galilée. Et la masse au repos, m, est un scalaire dans la théorie de RR, et elle est aussi invariante sur la transformation de Lorentz. Tous c'est cohérent. Mais la masse relativiste, $I = \gamma m$, elle change lors d'une transformation de Lorentz. Qu'est-ce-que c'est la solution de ce problème ?

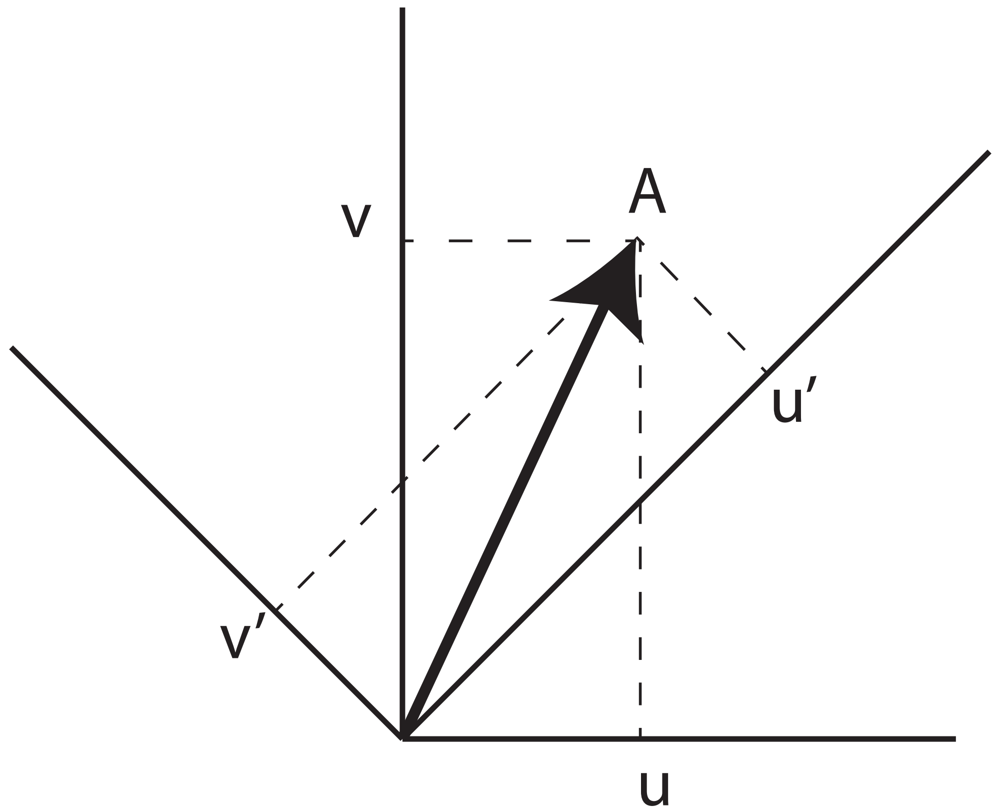

FIGURE 1 – Les composantes du vecteur $\vec{A}$ changent avec une changement des coordonnées comme une rotation des axes x et y.

Qu'est-ce-que c'est un tenseur ?

- Un tenseur est une application qui prend des vecteurs comme arguments et produit un nombre réel.
- Le nombre des vecteurs est le rang du tenseur. Par exemple, le tenseur métrique est un tenseur de rang deux : il prend deux vecteurs et les relie à un scalaire

  $$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a \in \mathbb{R}$$

  Nous verrons les autre exemples plus tard.
- Nous pouvons écrire un tenseur comme $\mathbf{t}(:, :, \ldots, :)$ pour préciser le rang, ex. $\mathbf{t}(:, :, :)$ pour un tenseur de rang 3 (il y a 3 deux-points).
- L'application doit être linéaire dans les arguments ; pour un

tenseur de rang 2 c'est-a-dire :

$$\mathbf{t}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\,\mathbf{t}(\mathbf{u}) + b\,\mathbf{t}(\mathbf{v}) \tag{3}$$

- On peut dire que les vecteurs sont des tenseur de rang 1. Ils prennent un vecteur et, par le produit scalaire, donnent un scalaire.
- Les scalaires sont des tenseur de rang 0. Ils prennent aucune vecteurs et donnent un scalaire.
- D'habitude en RG, nous travaillons avec les *champ tensoriel*, c'est la situation quand nous avons un tenseur défini à chaque point d'une variété ou d'une sous-partie d'une variété.

Composantes de tenseurs

- Comme les vecteurs, les tenseurs ont des composantes contravariantes et covariantes.
- Nous les trouvons par appliquer le tenseur sur les vecteurs d'une base ou sur ceux de la base duaux.
- Pour le teneur **t** de rang 1,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(\mathbf{e}_\alpha) &= t_\alpha \\ \mathbf{t}(\mathbf{e}^\alpha) &= t^\alpha \qquad (4)\end{aligned}$$

– Pour le teneur **R** de rang 2, il y a plus de possibilitiés,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) &= R_{\alpha\beta} \\
\mathbf{R}(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^\beta) &= R^{\alpha\beta} \\
\mathbf{R}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^\beta) &= R_\alpha{}^\beta \\
\mathbf{R}(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\beta) &= R^\alpha{}_\beta
\end{aligned} \tag{5}$$

– Faites attention, en générale, $R_\alpha{}^\beta \neq R^\alpha{}_\beta \neq R_{\alpha\beta}$, etc.
– Néanmoins $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a$ est une scalaire fixe indépendamment de

la manière avec lequel on écrit les vecteurs **u** et **v**. Donc,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \mathbf{R}(u^\alpha \mathbf{e}_\alpha, v^\beta \mathbf{e}_\beta) \\ &= u^\alpha v^\beta \mathbf{R}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) \quad \text{grâce à la linéarité de tout tenseur,} \\ &= u^\alpha v^\beta R_{\alpha\beta} \quad \text{par definition de composants du tenseur,} \\ &= \mathbf{R}(u_\alpha \mathbf{e}^\alpha, v_\beta \mathbf{e}^\beta) \quad \text{c'est les même vecteurs,} \\ &= u_\alpha v_\beta R^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{6}$$

– TD : Prouvez que

$$u_\alpha v^\beta R^\alpha{}_\beta = u^\alpha v_\beta R_\alpha{}^\beta$$

Symétries des tenseurs

- En generale, $\mathbf{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq \mathbf{R}(\mathbf{v},\mathbf{u})$. L'ordre des arguments est important.
- Définitions :

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{v},\mathbf{u}) \qquad \mathbf{R} \text{ est dite } \textit{symétrique} \\ &\mathbf{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\mathbf{R}(\mathbf{v},\mathbf{u}) \qquad \mathbf{R} \text{ est dite } \textit{antisymétrique} \end{aligned} \tag{7}$$

- TD : Prouvez (pour les tenseur de rang 2) que c'est toujours possible d'écrire

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$$

où $\mathbf{S}$ est symétrique et $\mathbf{A}$ est antisymétrique. Indice : Commencez avec

$$\mathbf{S}(u,v) \equiv \frac{\mathbf{R}(u,v) + \mathbf{R}(v,u)}{2}$$

Montez que celui est symétrique. Utilisez quelque chose similaire pour **A**, est montez que celui est antisymétrique.

– Il y a des généralisations pour les tenseur de rang plus haut que 2.

Le tenseur métrique

– Rappel : le tenseur métrique est définie par

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

– C'est le plus important tenseur pour RG parsqu'il détermine la géométrie d'une variété.

– Les composants covariantes sont

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$$

– En utilisant la définition de base duale, $\mathbf{e}^b \cdot \mathbf{e}_a = \delta^\beta_\alpha$ nous avons le résultat important :

$$g_\alpha{}^\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta^\beta_\alpha = g^\alpha{}_\beta$$

Remarquez que δ^β_α est décrit comme la matrice identité (ou matrice unité) :

$$[\delta_\alpha^\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– En RR en utilisant les coordonnes Cartésiennes c'est simplement :

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– TD : Quel-est le rang du tenseur métrique ? Est-ce qu'il est symétrique ou antisymétrique ou ni l'un ni l'autre ?

– TD : Prouvez les résultats utiles :

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= g_{\alpha\beta}\, u^\beta \\
u^\alpha &= g^{\alpha\beta}\, u_\beta \\
g^{\alpha\mu}\, g_{\mu\beta} &= \delta^\alpha_\beta
\end{aligned} \tag{8}
$$

Indice : Commencez avec

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= u_\alpha v^\beta g^\alpha{}_\beta \\
&= u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Monter et abaisser les indices des vecteurs et tenseurs

– Les opérations

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta}\, u^\beta$$
$$u^\alpha = g^{\alpha\beta}\, u_\beta \tag{10}$$

sont dites abaisser et monter les indices respectivement.

– Ils marchent pour les composant de tenseurs d'il n'importe quel rang aussi. Par exemple, pour les tenseurs de rang deux :

$$R_{\alpha\beta} = g_{\beta\mu}\, R_\alpha{}^\mu$$
$$R^{\alpha\beta} = g^{\beta\mu}\, R^\alpha{}_\mu \tag{11}$$

Ce n'est pas nécessaire de penser de l'ordre d'indices de $g_{\alpha\beta}$ ou

$g^{\alpha\beta}$ parce qu'ils sont symétriques.

– TD : Montrez que l'opération d'abaisser un indice marche de la même façon pour les tenseur de rang deux et vecteurs – montrez (11) est correcte.

Opérations élémentaires avec des tenseurs

– La somme de deux tenseurs est définie par le tenseur de même rang qui produit, pour les arguments donnés, la somme de réels produit par l'application des deux tenseur a les arguments. Pour rang 2, c'est-a-dire :

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{t} + \mathbf{r}$$

si et seulement si,

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

pour $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ quelconque.

– La multiplication d'un tenseur par un scalaire est définie par le tenseur de même rang qui produit, pour les arguments donnés, le produits du scalaire et le réels produit par l'application du tenseur originale. Pour rang 2, c'est-a-dire :

$$\mathbf{s} \equiv a\,\mathbf{t}, \qquad a \in \mathcal{R}$$

si et seulement si,

$$\mathbf{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a\,\mathbf{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

pour $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ quelconque.

- TD : Montrez que si $\mathbf{s} \equiv \mathbf{t} + \mathbf{r}$ donc $s_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta}$.
- TD : Montrez que si $\mathbf{s} \equiv a\,\mathbf{t}$ donc $s_{\alpha\beta} = a\,t_{\alpha\beta}$.

Le Produit Tensoriel

- Le produit tensoriel de deux tenseurs est un tenseur de rang égale à la somme des rangs des deux tenseurs originals, par exemple pour $\mathbf{t}$ de rang 2 et $\mathbf{r}$ de rang 1,

  $$(\mathbf{t} \otimes \mathbf{r})(:, :, :)$$

  tel que

  $$(\mathbf{t} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\ \mathbf{r}(\mathbf{w})$$

  Remarquez qu'on doit faire attention à l'ordre d'arguments.
- TD : Montrez que si $\mathbf{s} \equiv \mathbf{t} \otimes \mathbf{r}$ donc $s_{\alpha\beta\mu} = t_{\alpha\beta}\ r_{\mu}$.

Contraction d'un tenseur

- La contraction d'un tenseur est plus facilement exprimée en termes de composantes. Posons un exposant et un indice égaux et sommons suivant la convention d'Einstein.
- Par exemple, pour **t** un tenseur de rang 3, la contraction de la première et finale indice est

$$t^{\alpha}{}_{\beta\alpha}$$

- Notons que la contraction mange 2 rang. C'est-a-dire le resultat de contraction d'un tenseur de rang N est un tenseur de rang $(N-2)$.
- TD : Qu'est-ce-que c'est la relation entre la trace d'une matrice et la contraction d'un tenseur de rang 2 ?

Les tenseurs de base

– On peut penser d'un vecteur $\mathbf{u}$ comme un objet géométrique qui peut être construit comme une combinaison linéaire des vecteurs formant une base,

$$\mathbf{u} = u^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha} = u_{\alpha}\,\mathbf{e}^{\alpha}$$

– Est-ce-qu'il y a quelque chose comme ça pour les tenseur ? Oui, on peut construire les tenseurs de base par le produit tensoriel. Pour un tenseur de rang 2, ils sont

$$(\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}) \qquad \text{ou} \qquad (\mathbf{e}^{\alpha} \otimes \mathbf{e}^{\beta})$$

– Donc, on peut écrire le tenseur de rang 2 $\mathbf{t}$ comme,

$$\mathbf{t} = t^{\alpha\beta}(\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}) = t_{\alpha\beta}(\mathbf{e}^{\alpha} \otimes \mathbf{e}^{\beta})$$

– TD : Démontrez que

$$\mathbf{t} = t^{\alpha\beta}(\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) = t_{\alpha\beta}(\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta)$$

Si nous n'avons pas de temps libre, regardez § 4.8 de HEL (2010).

Tenseurs et changements de coordonnées

– Rappelez-vous de cours 3 que sous un changement de coordonnées $x^\alpha \to x'^\alpha$, c'est-a-dire pour un ensemble de fonctions qui relient les deux systèmes de coordonnes (`http://fr.wikipedia.org/wiki/Systeme_de_coordonnees_curvilignes`) :

$$x^\alpha = x^\alpha(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

les vecteurs de base des deux systèmes sont relies par

$$\mathbf{e}'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\,\mathbf{e}_\mu \tag{12}$$

$$\mathbf{e}'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\mathbf{e}_\mu \tag{13}$$

– Et les composants contravariantes et covariantes sont relies par les même matrices de transformations

$$u'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\, u_\mu \tag{14}$$

$$u'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, u^\nu \tag{15}$$

C'est facile a rappeler parce que c'est le seule possibilité qui est d'accord avec la convention de sommation d'Einstein et donne les indices/exposants correctes.

– C'est facile d'extendue les arguments des vecteurs (des tenseurs de rang 1) à les tenseurs de rang quelconque. Pour les tenseurs de rang 2,

$$t'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} t_{\alpha\beta} \tag{16}$$

$$t'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\, t^{\alpha\beta} \tag{17}$$

– TD : Montrez la règle (16).

– TD : Trouvez la règle qui relie les composantes mixe d'un tenseur de rang 2 comme ${t'}_{\mu}^{\ \nu}$ à ses composantes d'un autre base $t_{\alpha}^{\ \beta}$. Si nous n'avons pas de temps libre, regardez Eq. (4.11) dans HEL(2010).

Dérivée covariante d'un tenseur

– Rappelez-vous que quand nous dérivons un vecteur repère dans un système des coordonnées curvilignes, il faut tenir compte des dérivées des vecteurs de base :

$$\left(\mathbf{e}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)(u^\beta \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}^\alpha \otimes \left(\mathbf{e}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u^\beta) + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathbf{e}_\beta)\right)$$
$$= \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u^\beta) + u^\mu \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\right) \qquad (18)$$

– Cette notion de dérivée covariante d'un vecteur peut être étendue facilement aux tenseurs de plus haut rang.

$$\mathbf{e}^\alpha \otimes \frac{\partial(t^{\beta\gamma}\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma)}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}^\alpha \otimes \left(\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \frac{\partial t^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + t^{\beta\gamma}(\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\alpha} \otimes \mathbf{e}_\gamma) + t^{\beta\gamma}(\mathbf{e}_\beta \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial x^\alpha})\right) \tag{19}$$

$$= (\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma)\left(\partial_\alpha t^{\beta\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\, t^{\mu\gamma} + \Gamma^\gamma{}_{\mu\alpha}\, t^{\beta\mu}\right) \tag{20}$$

Resumé : Dérivée covariante d'un tenseur

- C'est courant de parler de « le vecteur u^α » plutôt que « le vecteur qui a les composantes u^α ». C'est important de comprendre que ce n'est pas strictement correcte, parce que les composantes changent avec une changement de base alors que le vecteur ne change pas. Mais c'est courant parce que c'est plus court.
- De même façon, c'est courant de parler de « le tenseur $t^{\alpha\beta}$ » plutôt que « le tenseur qui a les composantes $t^{\alpha\beta}$ ».
- Donc c'est normale d'écrire les règles de dérivée covariante sans

les vecteurs et tenseurs de base :

$$\nabla_\alpha u^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u^\beta) + u^\mu \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} \quad \text{, voir HEL Eq. (3.32)} \tag{21}$$

$$\nabla_\alpha t^{\beta\gamma} = \partial_\alpha t^{\beta\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\, t^{\mu\gamma} + \Gamma^\gamma{}_{\mu\alpha}\, t^{\beta\mu} \quad \text{, voir HEL Eq. (4.17)} \tag{22}$$

– La dérivée covariante d'un vecteur ou tenseur est un peu différente [faites attention au signe negatif] pour les composantes covariantes :

$$\nabla_\alpha (u_\beta) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u_\beta) - u_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \quad \text{, voir HEL Eq. (3.33)} \tag{23}$$

$$\nabla_\alpha (t_{\beta\gamma}) = \partial_\alpha t_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\, t_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\alpha}\, t_{\beta\mu} \quad \text{, voir HEL Eq. (4.17)} \tag{24}$$

Les symboles de Christoffel (ou la connexion affine) : $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$

– Définition (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (3.12)) :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\mathbf{e}_{\alpha}) = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\mu}$$

– Symétrie (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (3.19)) :

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

– Relation avec le tenseur métrique (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (3.21)) :

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\sigma}[\partial_{\beta}g_{\sigma\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\sigma\beta} - \partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}]$$

Ce n'est pas nécessaire de rappeler cet équation, mais c'est important de remarquer que ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ est relie à les dérivées temporelle et spatiale du tenseur métrique.

TD : Exemple familier en deux dimensions

– Par exemple, avec les coordonnées polaires, $(x^1, x^2) = (r, \theta)$, dans le plan Euclidien,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\theta \\ y &= r\ \sin\theta \end{aligned} \tag{26}$$

– TD : Trouvez les deux matrices de transformation entre le système des coordonnées Cartésien et polaires.

- TD : Trouvez les vecteur de base polaires $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ par rapport des vecteur de base Cartésiens $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
- TD : Trouvez quelque symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathbf{e}_1) \equiv \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_r) \qquad & \rightarrow \text{trouvez } \; {\Gamma^\mu}_{rr} \\
\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathbf{e}_1) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_r) \qquad & \rightarrow \text{trouvez } \; {\Gamma^\mu}_{r\theta} \\
\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathbf{e}_2) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_\theta) \qquad & \rightarrow \text{trouvez } \; {\Gamma^\mu}_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{27}$$

- TD : Est-ce-que vous pouvez vérifier que

$${\Gamma^\mu}_{r\theta} = {\Gamma^\mu}_{\theta r}$$

Références

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Things I didn't cover regarding tensor calculus

- Derivative along a curve.
- How to prove something's a tensor.
- Tensor equations and if the components are zero in one basis they are zero in all bases.
- Proof of the covariant derivative extension to tensors (do as TD if time).