Cours 5. Courbure de l'espace-temps et le tenseur d'Einstein

Résumé du cours d'aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur le calcul tensoriel sur une variété pseudo-riemannienne.
- Le principe d'équivalence.
- Courbure intrinsèque d'une variété.
- Tenseur de Riemann (tenseur de courbure).
- Tenseur de Ricci et courbure scalaire.
- Tenseur de Einstein.

Résumé du dernier cours sur le calcul tensoriel sur une variété pseudo-riemannienne

–

Le principe d'équivalence (EP) fort

- Dans un laboratoire assez petit en chute libre (sans rotation) les lois de la physique sont les mêmes qu'en RR.
- Cette idée est dite « le principe d'équivalence (EP) » parce qu'elle implique que l'accélération est la même chose de la gravitation. Si on était dans un vaisseau spatial (et sans regardant par les fenêtres) on ne pouvait pas distinguer entre les deux situations : (a) on est dans un référentiel inertiel, à repose à la surface d'une grande planète ou la accélération de gravitation à la surface est g, (b) On est loin de toutes les planètes et autre source de la masse extérieure, mais dans un référentiel en accélération uniforme égale à g.
- Cette idée explique pour quoi la masse d'inertie est égale à la masse gravitationnelle, quelque chose connu depuis Galilée mais

pas compris pourquoi

- Pourquoi nous avons précisé « un laboratoire *assez petit* » ? Nous voulons que le champ gravitationnel est presque *uniforme* dans le laboratoire entier. En réalité ceci n'est jamais exactement possible, mais c'est plus proche d'être correcte dans un petit laboratoire dans le champ gravitationnel d'une grande planète.
- La force en raison de la variation du champ gravitationnel est dite « la force de marée ».

La gravitation en tant que courbure de l'espace-temps

- Le EP a conduit Albert Einstein à l'idée que *la gravitation ne doit pas être considérée comme une force conventionnelle, mais plutôt comme une manifestation de la courbure de l'espace-temps.*
- C'est le principe à la base de RG.
- La trajectoire d'une particule dans un champ de gravitation et aucune force (pas de champ électrique, nucléaire, etc.), ce serra celle d'une particule *libre* – c'est-a-dire la trajectoire d'une particule en chute-libre dans un champ de gravitation est une géodésique de l'espace-temps.
- La équation de mouvement de ce particule est

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{0}$$

Géométrie de l'espace-temps

- Le EP nous conduit au résultat que l'espace-temps est une *variété pseudo-riemannienne.*
- Rappelez-vous qu'en le 2^e cours j'ai promis d'expliquer pourquoi nous allions utiliser seulement les variétés pseudo-riemanniennes, c'est-a-dire les variétés pour lesquelles l'élément de longueur (carré) a la forme :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

- Pour les variétés pseudo-riemanniennes, nous avons trouvé que c'est toujours possible de trouver un système des coordonnées pour lequel au point donné de la variété P nous avons

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}(P) &= \eta_{\alpha\beta} \\
\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta}\right)_P &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Proche du point P la variété a la géométrie de Minkowski. Voir § 2.11 de (*Hobson et al.*, 2010).

– Mais le EP (le fait que « dans un laboratoire assez petite en chute libre (sans rotation) les lois de la physique sont les mêmes qu'en RR ») implique que la géométrie locale de l'espace-temps est celle de Minkowski :

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}(P) &= \eta_{\alpha\beta} \\
\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta}\right)_P &= 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

– En bref, si on faisait l'hypothèse que la gravitation n'est pas une force traditionnelle mais il s'agit de la courbure de l'espace-temps qui est une variété pseudo-riemannienne, puis le EP c'est prévoit par les mathématiques, en particulier le fait qu'on peut trouver une transformation des coordonnées qui rend

$$g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta}\right)_P = 0 \tag{3}$$

En revanche, le EP nous conduit à la géométrie de l'espace-temps est celle d'une variété pseudo-riemannienne.

Gravitation et la courbure d'espace-temps

– Rappelez-vous aussi de cours 2 bien que c'est toujours possible de trouver un système des coordonnées pour lequelle Eq. 1 s'applique, cependant *ce n'est toujours pas possible* d'avoir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu x^\nu} g_{\alpha\beta} \right)_P = 0$$

parce qu'il n'y a pas suffisant degrés de liberté, voir § 2.11 de (*Hobson et al.*, 2010).

– Donc, quand l'espace-temps est courbe, bien que l'espace-temps est localement comment ceci de Minkowski, cependant il est globalement courbe.

– Donc, quand l'espace-temps est courbe, bien que nous pouvons toujours trouver un système des coordonnées localement pseudo-Euclidien, cependant ces coordonnés n'appliquent que localement.

– Et comme Einstein a trouvé le EP dit que « dans un laboratoire assez petite en chute libre (sans rotation) les lois de la physique sont les mêmes qu'en RR. »
– Et finalement, nous devons chercher les conséquences de gravitation dans la courbure (dans la deuxième dérivée du tenseur métrique).

Courbure intrinsèque d'une variété : tenseur de Riemann

– La dérivée covariante d'un vecteur, contrairement à la dérivée partielle d'un vecteur, ne commute pas avec elle-même :

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma \nabla_\beta \, v_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma \, v_\alpha &= R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} v_\mu \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

– $R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$ est dite « le tenseur de Riemann » ou « le teneur de courbure ».

– TD : Trouvez l'expression du tenseur de Riemann en fonction du symbole de Christoffel

– TD : Trouvez l'expression du tenseur de Riemann en fonction du tenseur métrique (ce n'est pas nécessaire de simplifier complètement).

– TD : Trouvez le tenseur de Riemann dans une région plate ?

Solutions

- Voir Eq. (7.13) dans HEL2010 :

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}$$

- Utilisez (voir Eq. (3.21) de HEL2010, ou la fin de notre cours 4) :

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\sigma}[\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}]$$

Tenseur de Riemann

– Dans une région *plate* (c'est-a-dire sans courbure), on peut trouver *un* système des coordonnées qui rendre

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

pour *tous les points* de la région. Donc,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu x^\nu} g_{\alpha\beta} = 0$$

pour tous les points de la région.

– Donc, dans une région plate

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

– Ou vous pouvez dire aussi dans une région plate, on peut trouver *un* système des coordonnées qui rendre les vecteurs de base qui ne changent pas avec position donc $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = 0$, et donc

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

– L'annulation du tenseur de Riemann est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une région d'une variété soit plate (*Dirac*, 1996).

Les symétries de tenseur de Riemann

– On peut démontrer que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\sigma}\, R^{\sigma}{}_{\beta\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\beta\nu}\right) \\ &\quad - g^{\sigma\gamma}(\Gamma_{\sigma\alpha\mu}\,\Gamma_{\gamma\beta\nu} - \Gamma_{\sigma\alpha\nu}\,\Gamma_{\gamma\beta\mu}) \end{aligned} \tag{6}$$

– A un point P nous pouvons toujours trouver un système des coordonnées pour lequel $\Gamma_{\gamma\beta\mu} = 0$ au ce point P (mais pas forcement dans tous la région). Dans ces coordonnées,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(P) = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\beta\nu}\right)(P) \tag{7}$$

– TD : Trouvez les symétries de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Les symétries de tenseur de Riemann

- Et maintenant ce très facile de voir que les symétries de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ sont

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \tag{8}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \tag{9}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{10}$$

- L'identité suivant est dite l'identité cyclique :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{11}$$

Gagner du temps

– Bien que nous avons obtenu les relations de symétrie (8,9,10) et identité cyclique (11) dans un système des coordonnées particulier à point $\mathcal{P}$, *grâce à leur nature tensorielle, elles sont valables dans tout système des coordonnées.*

Degrés de liberté

- TD : Combien de composants a le tenseur de courbure ?
- En raison des relations de symétrie (8,9,10) et l'identité cyclique (11), le nombre des composants indépendant sont seulement 20.
- L'argument pour ce nombre n'est pas compliqué mais c'est un peu long (si vous vouliez, vous pourriez trouver la solution de question 18 de chapitre 6 du livre (*Schutz*, 2009) ici `http://stockage.univ-brest.fr/~scott/Physics/index_phys.html`. Ici sont quelque étapes de cette solution :
- TD : Quelle est la valeur des composants $R_{\alpha\alpha\mu\nu}$ et $R_{\alpha\beta\mu\mu}$?
- TD : Des 16 paires du premier indices, (α, β), combien donnent les composants libre ou indépendant ? Ex. la paire $\alpha = \beta = 0$ donne $R_{00\mu\nu}$ qui n'ont pas libre comme nous venons de voir, mais la paire $(\alpha = 0, \beta = 1)$ donne un composant libre

$R_{01\mu\nu} = -R_{10\mu\nu}$ (pour l'instant, ne comptez pas les combinaison de dernier paire d'indice).

- Avec les arguments comme ci-dessus, nous pourrions trouver que les relations de symétrie (8,9,10) réduisent le nombre de degrés de liberté de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ de 256 à 21.
- Et l'identité cyclique réduit le nombre de degrés de liberté de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ de 21 à 20.

Contraction du tenseur de Riemann

- Pour les équations d'Einstein qui décrivent la géométrie d'espace-temps en présence de masse et énergie, nous avons besoin des contractions du tenseur de courbure.
- TD : Combien de contraction peut-on trouver du $R_{\alpha\beta\mu\nu}$?
- TD : Quelle est la valeur de la contraction sur les premiers deux composants du tenseur de Riemann ?

$$R^{\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\alpha\mu\nu} \tag{12}$$

- TD : Il y a combien de contractions de tenseur de Riemann indépendantes ?

Tenseur de Ricci

– La contraction sur la première composante et la dernière composante du tenseur de Riemann est dite « le tenseur de Ricci » :

$$R^{\nu}{}_{\alpha\beta\nu} \equiv R_{\alpha\beta} \tag{13}$$

– Faites attention, nous utilisons la même lettre R pour les deux tenseurs, mais c'est assez claire parce que il y a toujours 4 indice pour le tenseur de Riemann et 2 pour le tenseur de Ricci.
– Faites attention, autre livres utilise la contraction sur la première et troisième composantes pour leur tenseur de Ricci (e.g *Schutz*, 2009).

– Le tenseur de Ricci est symétrique

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\beta\alpha} \\ g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta} &= R^{\alpha}{}_{\beta} \\ g^{\sigma\alpha} R_{\beta\sigma} &= R_{\alpha}{}^{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta} \end{aligned} \tag{14}$$

donc nous pouvons écrire R^{α}_{β} sans ambiguïté.

Courbure scalaire

– La contraction des deux indices de ce tenseur mène à la « courbure scalaire » ou « scalaire de Ricci » :

$$R \equiv g^{\sigma\beta} R_{\sigma\beta} = R^{\beta}_{\beta} \tag{15}$$

Le tenseur de Einstein

– En cours 1 j'ai dit que RG replace les équations vectoriels de gravitation Newtoniennes avec les équations du champ gravitationnel d'Einstein :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R = -\kappa T_{\alpha\beta} \tag{16}$$

où $G_{\alpha\beta}$ est le *tenseur d'Einstein*, $R_{\alpha\beta}$ et R sont reliés à la courbure de l'espace, et $T_{\alpha\beta}$ est le *tenseur énergie-impulsion*, et κ est une constante.

– Finalement nous sommes près de comprendre la coté gauche de cette équations fondamentale, une de la plus importante et plus belle résultats de physique moderne.

– Nous sommes à mi-chemin !

TD : Exemple familier en deux dimensions

– Par exemple, avec les coordonnées polaires, $(x^1, x^2) = (r, \theta)$, dans le plan Euclidien,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta \\ y &= r\,\sin\theta \end{aligned} \tag{18}$$

– TD : Trouvez les deux matrices de transformation entre le système des coordonnées Cartésien et polaires.

– TD : Vérifiez qu'elles sont inverses :

$$(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta})(\Lambda^{\beta}{}_{\gamma'}) = I \qquad \text{ou}$$
$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\,\Lambda^{\beta}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'} \quad \text{le même chose avec notation des tenseurs} \tag{19}$$

ou I est la matrice identité (unité).

– TD : Trouvez les vecteurs de base polaires $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ par rapport des vecteurs de base Cartésiens $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ utilisant les équations en forme tenseur :

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\,\vec{e}_{\beta}$$

– TD : Vérifiez que vous pouvez obtenir les même vecteurs de base à partir des lignes de coordonnées. Indice : écrivez les deux lignes de coordonnées qui passent entre un point $\mathcal{P}$.

– TD : Trouvez quelque symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathbf{e}_1) &\equiv \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_r) && \rightarrow \text{trouvez } \Gamma^{\mu}{}_{rr} \\
\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathbf{e}_1) &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_r) && \rightarrow \text{trouvez } \Gamma^{\mu}{}_{r\theta} \\
\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathbf{e}_2) &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{e}_\theta) && \rightarrow \text{trouvez } \Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{20}$$

– TD : Est-ce-que vous pouvez vérifier que

$$\Gamma^{\mu}{}_{r\theta} = \Gamma^{\mu}{}_{\theta r}$$

– TD : Trouvez le tenseur de courbure de Riemann pour le plan Euclidien en coordonnées cartésiens et polaires.
– TD : Trouvez les mêmes quantités pour la surface de une sphère en coordonnées sphériques (r = une constante).

Références

Dirac, P. A. M. (1996), *The General Theory of Relativity*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Schutz, B. (2009), *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge UK.