Le tenseur d'énergie-impulsion et les équations d'Einstein

Résumé du cours d'aujourd'hui

- Résumé du dernier cours sur la Courbure de l'espace-temps et le tenseur d'Einstein.
- Tenseur d'énergie-impulsion.
- Les équations d'Einstein – les équations de champs gravitationnel.
- Les équations d'Einstein dans le vide.
- Le champs gravitationnel dans la limite faible/newtonienne.

Résumé de la Courbure de l'espace-temps et le tenseur d'Einstein

– Rappel : Les équations d'Einstein,

$$G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

ou $G_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'Einstein.

– $G_{\alpha\beta}$ décrit la courbure d'espace-temps, voir (*Hobson et al.*, 2010, § 7.11), et est déterminé par

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

ou $R_{\alpha\beta}$ et R sont le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci.

– On obtiens le scalaire de Ricci de la contraction du tenseur de Ricci :

$$R \equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\alpha}$$

– Le tenseur de Ricci est déterminé par la contraction du tenseur de courbure (de Riemann) :

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu\nu\alpha}$$

– Et finalement le tenseur de courbure est défini utilisant la dérivée covariante d'un vecteur arbitraire (*Hobson et al.*, 2010, § 7.9) :

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} v_{\sigma} = \nabla_{\gamma}\nabla_{\beta} v_{\alpha} - \nabla_{\beta}\nabla_{\gamma} v_{\alpha}$$

– Le tenseur de courbure a 256 composantes, mais a cause des symétries

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (1) \end{aligned}$$

et l'identité cyclique,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

il admet seulement 20 composantes indépendantes (pour un espace-temps de dimension 4).

– Dans une région plate d'espace-temps,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0$$

Tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$

– Les équations d'Einstein décrive quantitativement la relation entre la courbure, $G_{\alpha\beta}$, et la distribution de matière en tout événement de l'espace-temps, $T_{\alpha\beta}$.

– Pour comprendre les équations d'Einstein, il reste de comprendre le membre de droite, $\mathbf{T}$.

– Si on prend $c = 1$, on peut dire que les composantes contravariantes

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}^{\alpha}, \mathbf{e}^{\beta}) = T^{\alpha\beta}$$

sont les flux de la α composante de quadi-impulsion à travers une surface de x^{β} constante.

– Et donc, maintenant vous comprenez les deux côté des équations d'Einstein ! (La constante $\kappa = -8\pi^2 G/c^4$.)

Impulsion approfondie

– Rappelez-vous du cours 3 où nous définissions le quadrivecteur d'impulsion « quadi-impulsion » comme

$$\mathbf{p} = m_0\,\mathbf{u}$$

où m_0 est la masse au repos (en notation moderne elle est simplement m mais j'aime préciser *au repos* avec le 0 en bas), et $\mathbf{u}$ est la quadrivitesse :

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d}{d\tau}\left(x^\mu \mathbf{e}_\mu\right) \tag{2}$$

dont les composantes contravariantes, par rapport de la vitesse habituelle sont

$$
\begin{aligned}
u^\mu \equiv \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{u} &= \gamma(|\vec{v}|)\ (c, \vec{v}) \\
&= \gamma(|\vec{v}|)\ \left(c, \frac{\partial x^i}{\partial t}\right) \\
&= \gamma(|\vec{v}|)\ \left(c, \frac{\partial x^1}{\partial t}, \frac{\partial x^2}{\partial t}, \frac{\partial x^3}{\partial t}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

– TD : Qu'est-ce-que c'est la première composante de quidri-impulsion ?
– TD : Qu'est-ce-que ce sont les 3 dernières composantes de quidri-impulsion ?

Impulsion approfondie

– TD Solution :

$$m_0\gamma c = \frac{m_0\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c}$$

ou E est l'énergie totale relativiste (rappel de cours 1).

– TD Solution :

$$p^i = m_0 u^i = (m_0\gamma)\vec{v} = I\,\vec{v} = \vec{p}$$

ou $\vec{p}$ est la quantité de mouvement habituelle, mais avec la masse relativiste I.

$T^{\alpha 0}$

- Qu'est-ce-que c'est un flux à travers une surface de constante temps ? ?
- Considérons, par exemple, un fluide au repos par rapport de nous avec n_0 particules par volume unité.
- Nous paramétrons les coordonnées des particules par temps-propre τ et nous observons que les particules ne changent pas de position,

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0, \qquad \text{, le fluide est au repos}$$

mais elles sont en mouvement dans la direction de temps à la vitesse de lumière !

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= \frac{d(c\,t)}{d\tau} && \text{, définition de } x^0 \\ &= \frac{d(c\,t)}{dt} && \text{, le fluide est au repos} \\ &= c \end{aligned} \tag{4}$$

– Toutes les particules ont la même vitesse c dans la direction de temps, donc $n_0 c$ particules traversent une surface de constants temps par volume unité par temps unité.
– Le flux des particules traversant une « surface de temps constant » est c fois la densité de particules.

Densité approfondie

- Dans un référentiel en mouvement, le volume avec n_0 particules dedans subit une contraction de Lorentz γ^{-1} le long de la direction du mouvement et donc

$$n' = \gamma \, n_0$$

- TD Pouvez-vous deviner la densité de particules n est quelle sort de grandeur ? (Scalaire, vecteur, composante de vecteur, composante de tenseur de rang combien ?)

Densité approfondie

- TD Solution : La densité de particules n doit être la première composante d'un vecteur proportionnel à la quadrivitesse

$$\mathbf{N} \equiv n_0 \mathbf{u}$$

- Puis, dans un référentiel S' en mouvement à vitesse $|\vec{v}| = -v$ le long de l'axe x, le quadri-vecteur $\mathbf{N}$ deviens

$$\begin{bmatrix} N'^0 \\ N'^1 \\ N'^2 \\ N'^3 \end{bmatrix} = n_0 \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_0 \begin{bmatrix} c\,\gamma \\ \gamma\, v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Si $N^0 = n_0 c$ puis $N'^0 = \gamma n_0 c$

Le flux de particules

– Puis, dans le référentiel S' [celui en mouvement à vitesse $|\vec{v}| = -v$ le long de l'axe x], le quadri-vecteur $\mathbf{N}$ deviens

$$\begin{bmatrix} N'^0 \\ N'^1 \\ N'^2 \\ N'^3 \end{bmatrix} = n_0 \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_0 \begin{bmatrix} c\gamma \\ \gamma\, v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

– $N'^1 = \gamma n_0\, v = n'\, v$, c'est le flux de particules dans la direction de mouvement du fluide.

Densité d'Energie, $\rho\, c^2$

– Supposons chacune des particules ont la même masse au repos, m_0. Donc, l'énergie de chacune au repos est $m_0 c^2$ et la densité d'énergie par rapport du référentiel où le fluide est stationnaire est

$$\rho_0\, c^2 \equiv n_0 m_0 c^2$$

– TD : Par rapport du référentiel S' [en mouvement à vitesse $|\vec{v}| = -v$ le long de l'axe x], qu'est-ce-que c'est l'énergie de chacune ?

– TD : Et encore dans S', qu'est-ce-que c'est la densité d'énergie, $\rho'\, c^2$?

– TD : Donc, ρ est quelle sort de grandeur ? (Un scalaire, une composante d'un tenseur de quel rang ?)

Densité d'Energie, $\rho\, c^2$

– TD : Solution : Par rapport du référentiel S' [en mouvement à vitesse $|\vec{v}| = -v$ le long de l'axe x], l'énergie de chacune est $m_0\gamma c^2$, *i.e.* γ fois plus grande que au repos.

– TD : Et encore dans S', la densité d'énergie,

$$\rho'\, c^2 = n'\, m_0\gamma c^2 = \gamma^2\, n_0 m_0\, c^2 = \gamma^2\, \rho_0\, c^2$$

– TD : Donc, ρ est la première composante d'un tenseur de rang deux, un tenseur proportionnel du produit tensoriel de deux quadrivecteurs $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

$T^{\alpha\beta}$ pour poussière

– Considérons le tenseur de rang 2

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{N},$$

ou **N** est le flux de particules identique et sans interaction et **p** est le quadri-impulsion de chacune des particules. Donc **T** a composantes contrariantes données par :

$$T^{\alpha\beta} = p^{\alpha}\, N^{\beta} = m_0 u^{\alpha}\; n_0 u^{\beta} = \rho_0\, u^{\alpha}\, u^{\beta}$$

ou **u** est le quadri-vitesse du fluide.

– TD : Qu'est-ce-que c'est T^{00} dans le référentiel S pour lequel le fluide est au repos ?

– TD : Qu'est-ce-que c'est T^{00} dans le référentiel S' pour lequel le fluide est en mouvement $|\vec{v}| = v$?

- TD : Qu'est-ce-que c'est T^{0j} dans les référentiels S et S' ?
- TD : Qu'est-ce-que c'est T^{i0} dans les référentiels S et S' ?
- TD : Qu'est-ce-que c'est T^{ij} dans les référentiels S et S' ?

$T^{\alpha\beta}$ pour poussière

– TD Solution : Dans le référentiel S pour lequel le fluide est au repos,

$$T^{00} = p^0\, N^0 = \left(\frac{E}{c}\right) n_0\, c = (\rho_0 c)\; n_0\, c = \rho_0\, c^2$$

– TD Solution : Dans le référentiel S' [pour lequel le fluide est en mouvement $|\vec{v}| = v$],

$$T'^{00} = p^0\, N^0 = \left(\frac{E}{c}\right) n_0\, c = (\rho_0 \gamma c)\; \gamma n_0\, c = \rho'\, c^2$$

– TD : Solution : Dans les référentiels S et S'

$$\begin{aligned} T^{0j} &= p^0\, N^j \\ &= \left(\frac{E}{c}\right)(nv^j) \\ &= c^{-1} \text{ fois le flux d'énergie dans la direction } x^j \end{aligned} \tag{5}$$

– TD : Solution : Dans les référentiels S et S'

$$\begin{aligned} T^{i0} &= p^i\, N^0 \\ &= \left(m_0 \gamma v^i\right)(n\, c) \\ &= c \text{ fois la densité de } i\text{-composante d'impulsion} \end{aligned} \tag{6}$$

– TD : Solution : Dans les référentiels S et S'

$$\begin{aligned} T^{ij} &= p^i \, N^j \\ &= \left(p^i\right) \left(nv^j\right) \\ &= \text{le flux } i\text{−composante impulsion dans la direction } x^j \end{aligned} \qquad (7)$$

$T^{\alpha\beta}$ pour un fluid parfait

- Pour les fluides plus compliquer que la poussière, nous aurions un tenseur d'énergie-impulsion plus compliquer. Il faut prendre en compte toutes les formes d'énergie, les contraintes visqueuses, etc.
- Pour un fluide parfait, il n'y a ni transport de chaleur, ni viscosité. Mais les particules ont les mouvements désordonnés qui donner lieu à la pression. Donc, nous ne devons que ajouter les effets de la pression p.

$$\mathbf{T} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p\,\mathbf{g}$$

  (ne confondez pas pression, p, avec $\mathbf{p}$, la quadri-impulsion).
- TD : Qu'est-ce-que ce sont les composantes $T^\alpha\beta$ dans le référentiel où le fluide est au repos instantané en coordonnées pseudo-cartesien ?

$T^{\alpha\beta}$ pour un fluid parfait

– TD : Solution : Les composantes $T^{\alpha}\beta$ dans le référentiel où le fluide est au repos instantané en coordonnées pseudo-cartesien,

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - p\, g^{\alpha\beta} \\ &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - p\, \eta^{\alpha\beta} \quad \text{coordonnés cartesians locale} \end{aligned} \tag{8}$$

$$T^{00} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) u^0 u^0 - p\, \eta^{00} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) c^2 - p = \rho_0 c^2 \tag{9}$$

$$T^{0i} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) u^0 u^i - p\, \eta^{0i} = 0 \tag{10}$$

$$T^{i0} = T^{0i} = 0 \tag{11}$$

$$T^{ii} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^i - p\, \eta^{ii} = -p(-1) = p \tag{12}$$

Les équations d'Einstein dans le vide

- Dans le vide les équations d'Einstein sont simplement :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

  parce que l'espace-temps est plat là.
- TD : Calculez $R_{\mu\nu}$ à partir des symboles de Christoffel.

Tenseur de Ricci à partir des symboles de Christoffel

– TD : Solution :

– Utilisant Eq. (7.13) dans HEL2010 :

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}$$

nous mettons $\mu = \gamma$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\gamma}\, \Gamma^{\gamma}{}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\, \Gamma^{\gamma}{}_{\rho\gamma}$$

Le champs gravitationnel dans la limite faible/newtonienne

– La limite newtonienne

$$g_{00} \approx c^2 + 2\Phi = c^2 - 2\,\frac{G\,M}{r}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel newtonien, M est la masse de l'étoile, G est le constant gravitationnel, r est la distance du centre de masse.

Références

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.