Cours 7 : La géométrie de schwarzschild

Résumé du cours d'aujourd'hui

– Résumé du dernier cours sur le tenseur d'énergie-impulsion et les équations d'Einstein.
– Le tenseur métrique symétrique et statique – géométrie de Schwarzschild.
– Solution d'équations d'Einstein dans le vide avec la géométrie de Schwarzschild. (Nous ferons vraiment la physique de relativité générale aujourd'hui !)

—

—

Le tenseur métrique symétrique et statique – géométrie de Schwarzschild.

- Je trouve que les manuels ne sont pas très claire pour ce sujet, donc j'ai utilisé un peu de (*Hobson et al.*, 2010, Chapitre 9) et un peu de (*Schutz*, 2009, chapitre 10).
- Si vous lisez *Schutz* (2009), faites attention parce que :
  - le ${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}$ de (*Hobson et al.*, 2010) $= -{R^\alpha}_{\beta\mu\nu}$ de (*Schutz*, 2009),
  - et donc $R_{\mu\nu}$ de (*Hobson et al.*, 2010) $= -R_{\mu\nu}$ de (*Schutz*, 2009),
  - et aussi le $g_{\mu\nu}$ de (*Hobson et al.*, 2010) $= -g_{\mu\nu}$ de (*Schutz*, 2009).
- Une solution des équations d'Einstein consiste à trouver le tenseur métrique dans la région.
- En générale c'est difficile à cause des non-linéarités, mais nous

cherchons la plus simple solution.

- Considérons un objet massive sphérique qui ne change pas avec le temps.
- Donc, nous attendons un tenseur métrique isotrope et statique.
- Un tenseur métrique statique est un :
  1. qui a tout composants indépendant de temps :

     $$\partial_t \, g_{\alpha\beta} = 0$$

     C'est-a-dire « stationnaire ».
  2. pour lequel l'élément de longueur ne change pas sous la transformation $t \to -t$:

     $$ds^2(t) = ds^2(-t)$$

- La deuxième condition implique que si on déroule un film avec retournement temporel, on voit aucune différence. Ce n'est pas la même condition de la première. Nous pouvons le comprendre considérant une planète qui se tourne à un tau constant.

Le tenseur métrique avec une symétrie sphérique

– Nous utiliserons les spatiale coordonnes sphérique ($x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$) dont l'élément de longueur dans l'espace-temps plate (Minkowski espace-temps) est

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

– Fixant $dt = dr = 0$, nous avons l'élément de longueur sur la surface d'une deux-sphère :

$$dl^2 = r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{1}$$

– Un espace-temps a une symétrie sphérique si chaque point est sur la surface d'une deux-sphère, donc l'élément de longueur est :

$$dl^2 = f(t, r)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

où $f(t, r)$ est une fonction arbitraire et le tenseur métrique est indépendant de position sur la sphère ($g_{\alpha\beta}$ n'est pas une fonction de θ et ϕ).

– Nous pouvons définir une nouvelle coordonnée r' dont

$$r'^2 = f(t, r)$$

et nous récupérons la forme du élément de longueur (1), mais dans l'espace-temps courbe, bien entendu r' n'est forcement pas la distance radiale du centre de symétrie.

– A un point P nous pouvons toujours choisir l'axe de r' orthogonal des axes θ et ϕ, donc

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$$
$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = 0. \qquad (2)$$

Mais si ci-dessus est vérifie a un point sur la surface de la deux-sphère puis c'est forcement vérifié a chaque point sur la surface de la deux-sphère dû de la symétrie sphérique.

– Les deux condition (2) impliquent que

$$\begin{aligned} g_{r\theta} &= g_{\theta r} = 0 \\ g_{r\phi} &= g_{\phi r} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

– Aussi, nous aurions pu arguer que si $g_{r\theta} \neq 0$ puis nous aurions avoir une direction préférable sur la surface de deux-sphère (pas la même des autre directions). C'est-a-dire un déplacement de θ à $\theta + d\theta$ ne serrait pas le même d'un déplacement dans l'autre sens. Mais ça contredirait la symétrie sphérique, et donc $g_{r\theta} = 0$. Et de la même façon, $g_{r\phi} = 0$.

– Donc, l'élément de longueur dans l'espace-temps avec la symétrie d'une sphère n'est plus compliqué que :

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dt\,dr + 2g_{t\theta}dt\,d\theta + 2g_{t\phi}dt\,d\phi \tag{4}$$

$$+g_{rr}\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \tag{5}$$

où nous avons omis le prime sur r' pour raisons de commodité. Mais nous pouvons le simplifier plus.

– Pour la même raison que nous pouvons choisir les coordonnes où (3) sont vérifiés, nous avons dans l'espace-temps avec la symétrie sphérique

$$g_{t\theta} = g_{\theta t} = 0$$
$$g_{t\phi} = g_{\phi t} = 0. \tag{6}$$

Sinon, nous aurions avoir une direction préférable sur la surface de deux-sphère (pas la même des autre directions).

– En fin, avec (6), nous avons l'élément de longueur dans l'espace-temps avec la symétrie d'une sphère est

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dt\,dr + g_{rr}\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \qquad (7)$$

voyez (*Schutz*, 2009, Eq. (10.5) dans autre notation).

Le tenseur métrique ***statique*** avec une symétrie sphérique

– Maintenant nous imposons la deuxième condition, nous exigeons que la métrique doit être statique aussi.
– Rappelez-vous qu'il y a deux aspects du statique : 1) le tenseur métrique doit être stationnaire, 2) le changement $t \to -t$ ne change rien :

$$\partial_t \, g_{\alpha\beta} = 0 \tag{8}$$

$$ds^2(t) = ds^2(-t) \tag{9}$$

– Que le tenseur métrique doit être stationnaire implique pour (7) que :

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + 2g_{tr}(r)dt\,dr + g_{rr}(r)\,dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right) \tag{10}$$

– Que le changement $t \to -t$ ne change rien implique $g_{rt} = 0$. Sinon, si nous déroulons un film avec retournement temporel, on verrait une différence.
– Donc, nous sommes arrivé à la plus générale forme du tenseur métrique statique et avec la symétrie sphérique :

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)\,dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right) \tag{11}$$

C'est le même que (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (9.4)) et (*Schutz*, 2009, Eq. (10.7) dans autre notation).

Le système d'équations aux dérivées partielles

- Jusqu'à ce moment, nous n'avons pas utilisé les équations d'Einstein ! Nous avons trouvé la forme de la solution.
- Pour trouver les fonctions $g_{rr}(r)$ et $g_{tt}(r)$ nous utilisons les équations d'Einstein.
- Au début nous cherchons la structure d'espace-temps vide autour d'un étoile sphérique ou un trou noire sans rotation, pour lequel les équations d'Einstein sont

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

  comme nous avons vu dans Cours 5 et Cours 6.

– Et comme nous avons dérivé dans Cours 6,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\, \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\, \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}$$

et

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

[Faites attention, le $R_{\mu\nu}$ de (*Hobson et al.*, 2010) $= -R_{\mu\nu}$ de (*Schutz*, 2009).]

– Donc (12) nous donne un système d'équations aux dérivées partielles. Seulement 3 de les 4×4 équations sont intéressantes.

– Les étapes ne sont pas difficiles, mais il y a beaucoup des étapes !

– Pour notre statique métrique avec symétrie spherique,

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} g_{00}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{13}$$

– L'inverse est simple parce qu'il est diagonal

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{00}(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{rr}(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}(\theta) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Les symboles de Christoffel

– Des 40 possibles symbole de Christoffel indépendants, seulement 9 ne sont pas à zéro.
– TD : Chacun prend un de :

$$\Gamma^0{}_{\alpha\beta} \quad \Gamma^1{}_{\alpha\beta} \quad \Gamma^2{}_{\alpha\beta} \quad \Gamma^3{}_{\alpha\beta} \tag{15}$$

et calculez pour tous les $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ne oubliez pas que

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$$

donc chacun a 10 à calculer.

Les symboles de Christoffel

- Il y a seulement les 9 ci-dessous, plus ceux que l'on peut obtenir d'eux de la symétrie ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} = {\Gamma^\mu}_{\beta\alpha}$:

$$\begin{array}{lll} {\Gamma^0}_{01} = A'/(2A), & {\Gamma^1}_{00} = A'/(2B), & {\Gamma^1}_{11} = B'/(2B) \\ {\Gamma^1}_{22} = -r/B, & {\Gamma^1}_{33} = -(r\ \sin^2\theta)/B, & {\Gamma^2}_{12} = 1/r \\ {\Gamma^2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, & {\Gamma^3}_{13} = 1/r, & {\Gamma^3}_{23} = \cot\theta \end{array} \tag{16}$$

  où $A \equiv g_{00}$ et $B \equiv -g_{rr}$.
- Tous les autres sont nuls.

Le tenseur de Ricci : $R_{\alpha\beta}$

- TD : Chacun prend un rang du tenseur de Ricci :

$$\begin{array}{cccc} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{array} \tag{17}$$

- TD : Vérifiez avec les autres les terme en commun. [Ne oubliez pas que $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$.]
- TD : Solution : Pour R_{00} par exemple :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \quad \text{en générale}$$

$$R_{00} = \partial_t \Gamma^\sigma{}_{0\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{00} + \Gamma^\rho{}_{0\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho 0} - \Gamma^\rho{}_{00}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \tag{18}$$

Et on peut le simplifier comme le suivant :

$$\partial_t \Gamma^{\sigma}{}_{0\sigma} = 0 \qquad \text{notre métrique est stationaire par choix}$$

En regardant dans Eq. (16), nous voyons que le seule symbole de Christoffel avec double zéro un bas est $\Gamma^{1}{}_{00} = A'/(2B)$ et donc nous prenons $\sigma = 1$ dans le deuxième terme :

$$\begin{aligned} -\partial_\sigma \Gamma^{\sigma}{}_{00} &= -\partial_r \Gamma^{1}{}_{00} \\ &= -\partial_r(A'/(2B)) = -A''/(2B) + A'B'/(2B^2) \end{aligned} \tag{19}$$

Pour le troisième terme $\Gamma^{\rho}{}_{0\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\rho 0}$ nous devons avoir un zéro en bas. Il y a seulement deux termes dans Eq. (16) avec ça, $\Gamma^{0}{}_{01}$ et

$\Gamma^1{}_{00}$. Et donc,

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho{}_{0\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho 0} &= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{00}\Gamma^0{}_{10} = 2\Gamma^0{}_{01}\Gamma^1{}_{00} \\ &= 2A'/(2A)A'/(2B) \\ &= \frac{A'^2}{2AB} \end{aligned} \tag{20}$$

Et finalement le quatrième terme nous donne

$$\begin{aligned}-\Gamma^\rho{}_{00}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} &= -\Gamma^1{}_{00}\Gamma^\sigma{}_{1\sigma} \\ &= -\Gamma^1{}_{00}\Big(\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{12} + \Gamma^3{}_{13}\Big) \\ &= -A'/(2B)\Big(A'/(2A) + B'/(2B) + 1/r + 1/r\Big) \end{aligned} \tag{21}$$

– Et donc,

$$\begin{aligned} R_{00} = &- \frac{A''}{(2B)} + \frac{A'B'}{(2B^2)} + \frac{A'^2}{2AB} \\ &- \frac{A'}{(2B)}\left(\frac{A'}{(2A)} + \frac{B'}{(2B)} + \frac{2}{r}\right) \\ = &- \frac{A''}{2B} + \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'^2}{4AB} - \frac{A'}{2B} \end{aligned} \tag{22}$$

Remarquez qu'il y a une faute dans (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (9.8)) ; le B' dans le dernier terme devrait être B.

Le tenseur de Ricci : $R_{\alpha\beta}$ ...

- TD : Solution : Le deuxième rang du tenseur de Ricci :
- Pour R_{11} par exemple :

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \quad \text{en générale} \\
R_{11} &= \partial_r \Gamma^\sigma{}_{1\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{11} + \Gamma^\rho{}_{1\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho 1} - \Gamma^\rho{}_{11}\,\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \\
&= \partial_r \Big(\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{12} + \Gamma^3{}_{13} \Big) - \partial_r \Gamma^1_{11} \\
&\quad + \Big((\Gamma^0{}_{10})^2 + (\Gamma^1{}_{11})^2 + (\Gamma^2{}_{12})^2 + (\Gamma^3{}_{13})^2 \Big) \\
&\quad - (\Gamma^1{}_{11}) \Big((\Gamma^0{}_{10}) + (\Gamma^1{}_{11}) + (\Gamma^2{}_{12}) + (\Gamma^3{}_{13}) \Big) \\
&= \frac{A''}{2A} - \frac{(A')^2}{2A^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{(A')^2}{(2A)^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB} \\
&= \frac{A''}{2A} - \frac{(A')^2}{4A^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Remarquez qu'il y a une faute dans (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (9.9)) ; le B' dans le dénominateur du dernier terme devrait être B.

Résoudre les equations

- *Hobson et al.* (2010) trouvent la solution avec les première 3 équations.
- Ici, nous trouverons la solution avec seulement les première 2 équations. (Mais bien sur on peut vérifier que les 2 autres sont vérifie aussi.)

– Prenons $R_{00}B/A + R_{11}$ et trouvons

$$
\begin{aligned}
-\frac{A'}{rA} - \frac{B'}{rB} &= 0 \\
\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} &= 0, \qquad \text{où j'ai multiplié par : } \; (-r) \\
&= \frac{\frac{d(AB)}{dr}}{AB} \\
\frac{d(AB)}{dr} &= 0 \\
AB &= \text{constant} = \alpha \qquad (24)
\end{aligned}
$$

– Remplacez B avec α/A dans l'équation R_{00}, nous trouvons

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{A''\,A}{2\alpha} + \frac{A'\,A}{4\alpha}\left[\frac{A'}{A} - \frac{\alpha A'}{\alpha A}\right] - \frac{A'\,A}{r\alpha} \\
0 &= -\frac{A}{\alpha}\left[\frac{A''}{2} + \frac{A'}{r}\right] \\
0 &= \left[\frac{A''}{2} + \frac{A'}{r}\right] \qquad \text{pour solution non-triviale} \\
0 &= 2A' + rA'' \\
\frac{d(rA')}{dr} &= -A' \\
rA' + A + \beta = 0 & \qquad \beta \text{ est un constant d'integration} \\
\frac{dA}{dr} &= -\frac{A+\beta}{r} \\
\frac{dA}{A+\beta} &= -\frac{dr}{r} \\
\ln(A+\beta) + \ln(r) + \gamma = 0 & \qquad \gamma \text{ est un constant d'integration}
\end{aligned} \tag{25}$$

– continuation ...

$$
\begin{aligned}
\ln(A+\beta)+\ln(r)+\gamma = 0 & \qquad \gamma \text{ est un constant d'integration} \\
(A+\beta)r = -\exp(\gamma) & \\
A(r) = \alpha\left(1+\frac{k}{r}\right) & \qquad \text{nouvelles constantes}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

– Parce que $A\,B = \alpha$,

$$B(r) = \frac{1}{1+\frac{k}{r}}$$

– TD : Vérifiez que la solution pour $A(r)$ et $B(r)$ ci-dessus résout les 4 équations pour $R_{\alpha\alpha} = 0$. Chacun choisissez une.

Interpretation des constants

– Rappelez-vous de la limite newtonienne

$$A(r) = g_{00} \approx c^2 + 2\Phi = c^2 - 2\,\frac{G\,M}{r}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel newtonien, M est la masse de l'étoile, G est le constant gravitationnel, r est la distance du centre de masse. Donc,

$$\alpha = c^2 \qquad\qquad k = -2\,\frac{G\,M}{c^2}$$

– Finalement, l'intervalle est

$$(ds)^2 = c^2\left(1 - 2\,\frac{G\,M}{c^2 r}\right)(dt)^2 - \left(1 - 2\,\frac{G\,M}{c^2 r}\right)^{-1}(dr)^2 \tag{27}$$

$$- r^2\,(d\theta)^2 - r^2\,\sin^2\theta\,(d\phi)^2 \tag{28}$$

Ceci est le métrique de Schwarzschild.

– TD : Qu'est-ce-que vous pensez se produit lorsque

$$r = 2\,\frac{G\,M}{c^2}?$$

Références

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Schutz, B. (2009), *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge UK.