Cours 8 : Conservation d'énergie et d'impulsion et Mouvement géodésique

Résumé du cours d'aujourd'hui

– Conservation d'énergie et d'impulsion : $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$.
– Limite newtonienne de $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ pour un fluide parfait.
– Mouvement géodésique.
– Conservation d'une composante covariante d'impulsion.

—

—

Conservation d'énergie

- J'ai utilisé un peu de (*Hobson et al.*, 2010, Chapitre 8) et un peu de (*Schutz*, 2009, chapitre 4).
- Si vous lisez *Schutz* (2009), faites attention parce que la métrique $g_{\mu\nu}$ de (*Hobson et al.*, 2010) $= -g_{\mu\nu}$ de (*Schutz*, 2009).
- Comme **T** décrit l'énergie et l'impulsion d'un fluide ou système de particules, il devrait être liée à les principes de conservation d'énergie et d'impulsion.
- Considérons un volume de fluide cubique de longueur l (en coordonnées pseudo-cartésiens). (Voir pp. 98–99 dans Schutz(2009)).
- Le flux d'énergie qui entre le volume à travers la surface 4 (à $x = 0$) est, par définition de **T** :

$$l^2\, c T^{0x}(x = 0)$$

– Le flux d'énergie qui **entre** le volume à travers la surface 2 (à $x = l$) est, par définition de $\mathbf{T}$:

$$-l^2\, c\, T^{0x}(x = l)$$

– C'est similaire pour les surfaces 1 et 3 :

$$l^2\, c\, T^{0y}(y = 0) \qquad\qquad -\, l^2\, c\, T^{0y}(y = l)$$

– Il y a aussi les deux surface de $z =$constante :

$$l^2\, c\, T^{0z}(z = 0) \qquad\qquad -\, l^2\, c\, T^{0z}(z = l)$$

– La somme de tous les 6 flux d'énergie qui entrent le volume doit nous donner le taux de augmentation d'énergie dans le volume :

$$\frac{\partial}{\partial t} l^3 T^{00} = l^2\, c\,\Big(T^{0x}(x = 0) - T^{0x}(x = l) + T^{0y}(y = 0) - T^{0y}(y = l) + T^{0z}(z = 0) - T^{0z}(z = l)\Big) \tag{1}$$

ou (je dois écrire l'addition explicitement parce qu'il n'y a pas d'indice i en bas) :

$$\frac{\partial}{\partial t} l^3 T^{00} = -l^2\, c \sum_{i=1}^{3} \Big(T^{0i}(x^i = l) - T^{0i}(x^i = 0) \Big)$$

Divisons les membres de gauche et droit par c fois le volume l^3 et prenant le limite $l \to 0$ nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{3} \lim_{l\to 0} \left(\frac{T^{0i}(x^i = l) - T^{0i}(x^i = 0)}{l} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} \right) \\ &= -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z} \end{aligned} \tag{2}$$

– Rappelez-vous $x^0 = ct$, et donc,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0x}}{\partial x} + \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} + \frac{\partial T^{0z}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{0\alpha} \end{aligned} \tag{3}$$

– Ci-dessus est la conservation d'énergie de toute formes relativiste !

Conservation d'impulsion

- La démonstration ci-dessus était pour T^{00}, c'est la densité d'énergie. Mais en replaçant ci-dessus le mot « énergie » avec « impulsion » nous obtenons la même démonstration pour $T^{x\alpha}$ ou $T^{y\alpha}$ ou $T^{z\alpha}$.
- Donc,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ix}}{\partial x} + \frac{\partial T^{iy}}{\partial y} + \frac{\partial T^{iz}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} T^{i\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

et ça c'est la conservation d'impulsion qui s'applique en relativité.

Conservation d'énergie et d'impulsion

– Évidement nous pouvons ajouter les deux équations et obtenir la conservation d'énergie et d'impulsion,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

– Nous avons fait la démonstration en coordonnées pseudo-cartesiens, dans lesquels $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0$ et donc,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

Mais le deuxième égalité est une équation tensorielle, et par conséquent elle est valide dans tous référentiels ! (Si ça vous inquiète, voir aussi l'explication dans § 8.3 de HEL2010.)

– Puis $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, donc nous avons aussi :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$$

$\nabla_\beta T^{\alpha\beta}$ pour un fluide parfait

- Voir § 8.3 de HEL2010.
- Rappelez-vous de cours 6, pour un fluide parfait

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - p\,\eta^{\alpha\beta} \quad \text{coordonnés cartesians locale}$$

- Donc,

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \partial_\alpha (u^\alpha u^\beta) - \partial_\alpha p\,\eta^{\alpha\beta} \quad (5)$$

– Remarquez que

$$
\begin{aligned}
u_\beta u^\beta &= c^2 \qquad \text{, toujours} \\
\partial_\alpha(u_\beta u^\beta) &= \partial_\alpha c^2 = 0 \\
\partial_\alpha(g_{\beta\sigma}\, u^\sigma u^\beta) &= 0 \\
g_{\beta\sigma}\, \partial_\alpha(u^\sigma u^\beta) &= 0 \\
g_{\beta\sigma}\left(u^\beta(\partial_\alpha u^\sigma) + u^\sigma(\partial_\alpha u^\beta)\right) &= 0 \\
g_{\beta\sigma}\left(2u^\beta(\partial_\alpha u^\sigma)\right) &= 0 \\
u_\beta(\partial_\alpha u^\beta) &= 0 \qquad \text{, j'ai changé l'indice muet}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Ce serra utile quand nous prenons la contraction de l'Eq. (5) avec u_β, qui donne l'équation de continuité relativiste :

$$
c^2\partial_\alpha(\rho u^\alpha) + p\partial_\alpha u^\alpha = 0 \tag{7}
$$

– Soustrayons u^β fois l'équation de continuité de la divergence du tenseur l'énergie-impulsion (5) nous trouvons l'équation de mouvement relativiste :

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha \partial_\alpha u^\beta = \left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2}\right) \partial_\alpha p \tag{8}$$

– Considérons les composantes spatiales $\beta = i$ de l'équation de mouvement dans le limite newtonienne, c'est-a-dire

$$|\vec{v}| \ll c, \qquad p \ll \rho c^2$$

Donc,

$$\gamma(|\vec{v}|) \equiv \frac{1}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \to 1, \qquad u^\alpha = \gamma(c, \vec{v}) \to (c, \vec{v})$$

et donc,

$$\rho\left(c\frac{\partial u^i}{\partial(ct)} + u^j\partial_j u^i\right) = \left(\eta^{\alpha i}\right)\partial_\alpha p$$
$$\partial_t u^i + u^j\partial_j u^i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p \tag{9}$$

C'est l'équation de Euler de fluide mécanique classique – l'équation qui relie la force de gradient de pression avec l'accélération d'un particule de fluide parfait de volume unité. On peut la réécrire sous la forme d'une équation de conservation de l'impulsion (*Taillet et al.*, 2009).

Mouvement géodésique et la conservation d'énergie-impulsion

- Rappelez-vous que pendant cours 5 nous avons dit que le principe d'équivalence tiens que : *La trajectoire d'une particule dans un champ de gravitation et aucune force (pas de champ électrique, nucléaire, etc.), ce serra celle d'une particule* libre – *c'est-a-dire la trajectoire d'une particule en chute-libre dans un champ de gravitation est une géodésique de l'espace-temps.*
- La équation de mouvement de ce particule est

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{0}$$

- Il est possible montrer que les équations d'Einstein, et la conservation d'énergie-impulsion, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, conduisent à ce résultat, § 8.8 de HEL2010.

Géodésiques : paramètre affine

- Un géodésique est une généralisation de la notion de ligne droite. Voir § 3.17 HEL2010. Il est plus facile d'écrire l'équation de géodésiques utilisant un paramètre affine – c'est-a-dire il un change pas la magnitude du vecteur tangente $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \frac{d}{d\lambda}(x^\alpha \mathbf{e}_\alpha)$$

  Si $|\mathbf{t}(\lambda)|$ est constante le longe de la ligne, puis λ est dite « affine ».
- Nous pouvons toujours utiliser $\lambda = \tau$, le temps-propre, parce que

$$\mathbf{t} = \frac{d}{d\tau}(x^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \equiv \mathbf{u}, \qquad \text{la quadri-vitesse}$$

  et toujours

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = c^2$$

Donc τ est un paramètre affine !

Équation des géodésiques

– Sur un géodésique la *direction* de vecteur tangente de change le longe de la ligne.
– L'équation de géodésiques utilisant un paramètre affine λ est

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\lambda} = 0, \qquad \text{définition d'un géodésique} \tag{10}$$

– Mais, si $\lambda = \tau$

$$\mathbf{t} = \frac{d}{d\tau}(x^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \equiv \mathbf{u}, \qquad \text{la quadri-vitesse}$$

et nous obtenons une équation pour les géodésiques utilisant la dérivée covariante :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{t}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 0 \\
0 &= \frac{dx^\beta}{d\tau}\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\beta} = \frac{dx^\beta}{d\tau}\ \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u_\alpha \mathbf{e}^\alpha) \\
&= u^\beta\ \nabla_\beta u_\alpha \\
&= u^\beta\ [\partial_\beta u_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\, u_\sigma]
\end{aligned} \tag{11}
$$

Conservation sur une géodésique

– Re-écrivez l'équation des géodésiques (11)

$$\begin{aligned} u^\beta\,\partial_\beta u_\alpha &= u^\beta\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,u_\sigma \\ m_0^2 u^\beta\,\partial_\beta u_\alpha &= m_0^2\,u^\beta\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,u_\sigma \\ m_0 u^\beta\,\partial_\beta p_\alpha &= \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,p^\beta\,p_\sigma \\ m_0\frac{d}{d\tau}p_\alpha &= \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,p^\beta\,p_\sigma \\ &= \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\partial_\alpha g_{\gamma\beta}+\partial_\beta g_{\gamma\alpha}-\partial_\gamma g_{\beta\alpha}]\,p^\beta\,p_\sigma \\ &= \frac{1}{2}[\partial_\alpha g_{\gamma\beta}+\partial_\beta g_{\gamma\alpha}-\partial_\gamma g_{\beta\alpha}]p^\beta\,p^\gamma \\ &= \frac{1}{2}[\partial_\alpha g_{\gamma\beta}]p^\beta\,p^\gamma \qquad (12) \end{aligned}$$

– L'équation ci-dessus est complément générale pour une particule libre – elle suive une géodésique et sa composante covariante d'impulsion p_α est invariante si le tenseur métrique est indépendante de la même coordonnée x^α tout le long de la géodésique

$$\partial_\alpha g_{\gamma\beta} = 0$$

TD : Conservation d'impulsion pour quelque métrique importantes

L'exercice ci-dessous se trouve dans (*Schutz*, 2009, Exer. 7 de §7.6).

Considérez quatre métriques différentes :

1. métrique de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

2. métrique de Schwarzschild

$$(ds)^2 = c^2 A dt^2 - A^{-1} (dr)^2 - r^2\,(d\theta)^2 - r^2\,\sin^2\theta\,(d\phi)^2 \tag{15}$$

   où $A \equiv \left(1 - 2\,\frac{G\,M}{c^2 r}\right)$.

3. métrique de Kerr (*Hobson et al.*, 2010, Eq. (13.13)) :

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{B^2} c^2 dt^2 - \frac{B^2 \sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi - \omega dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{16}$$

avec constantes a et μ et les fonctions

$$\begin{aligned} B^2 &\equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta, \\ \Delta &\equiv r^2 - 2\mu r + a^2, \\ \omega &\equiv \frac{2\mu c r a}{B^2} \\ \rho &\equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \end{aligned} \tag{17}$$

4. métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (*Hobson*

et al., 2010, Eq. (14.10)) :

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{(dr)^2}{1 - k\, r^2} + r^2\, (d\theta)^2 - r^2\, \sin^2\theta\, (d\phi)^2 \right] \tag{18}$$

où k est un paramètre avec un de trois valeurs possibles $\{-1, 0, 1\}$ et $R(t)$ est une fonction de temps.

Conservation d'impulsion

- TD : Pour chaque métrique ci-dessus, trouvez toutes les composantes p_α conservé pour une particule en chute libre.
- TD : Écrivez la métrique de Minkowski en coordonnées sphérique. Remarquez que les métriques (ii) et (iv), celle de Schwarzschild et FRW sont « sphériquement symétrique ». Est-ce-qu'on peut trouvez les autres composantes de p_α qui sont conservés ?
- TD : Pour (i) en coordonnées sphérique, et (ii)–(iv), une particule tangente du plan équatorial, c'est-a-dire $p^\theta = 0$ à $\theta = pi/2$, p^θ est conservé. Pour les premières trois métriques, trouvez p^r comme fonction de m_0 et autres quantités conservés. Indice : utilisez $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^4$ =constant.
- TD : Pour une particule en chute libre dans la métrique (iv) à un temps radial, $p^\theta = p^\phi = 0$, puis les $p^\theta = p^\phi$ sont tourjours nulles.

Utilisez ça de demontre que p_r est conservé si $k = 0$.

Références

Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby (2010), *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles.

Schutz, B. (2009), *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge UK.

Taillet, R., V. Villain, and P. Febvre (2009), *dictionnaire de physique*, de boeck, Bruxelles.