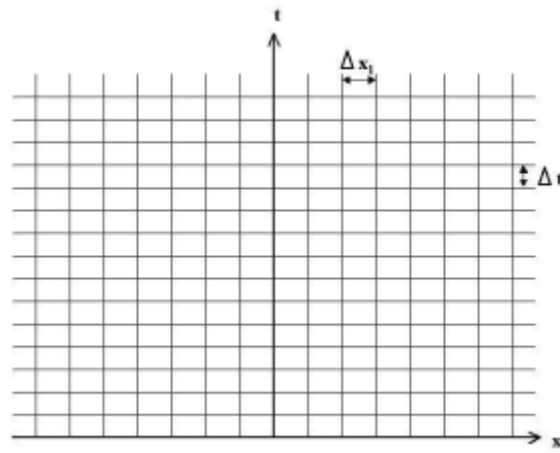


**Les  
différences  
finies**

## Introduction

Les différences finies sont une méthode de résolution numérique des EDP (avec les éléments finis et les volumes finis principalement). Avec les schémas de ce type, les erreurs dues à la discrétisation sont polynomiales (ex : en  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ ).

Pour la résolution d'une équation différentielles aux dérivées partielles (EDP) de dimension  $n+1$  (espace+temps), on introduit un maillage de l'espace  $R^n$  de pas  $\Delta x_i$  et du temps pas  $\Delta t$ . exemple, pour  $n=1$  :



On construit ainsi une grille. On note :

$$\begin{cases} x_{i_j} = j \Delta x_i & \text{pour } j \in \mathbb{Z} \\ t^k = k \Delta t & \text{pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les nœuds de la grille sont les coordonnées  $(x_{1j}, \dots, x_{nj}, t^k)$ .

Les différences finies consistent à approcher les opérateurs de dérivation par des *opérateurs discrets de dérivation*. Par exemple, pour :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(t^k, x_{1_j}) \simeq \frac{u(t^k, x_{1_j} + \Delta x_1) - u(t^k, x_{1_j})}{\Delta x_1}$$

où  $u(t^k, x_{1_j})$  est l'approximation de  $U$ , la fonction continue régie par l'EDP au point  $(t_0 + k \Delta t, x_0 + j \Delta x)$ . La construction de tels schémas pour une équation différentielle et une EDP avec un terme en espace 1D. Pour l'EDP, nous distinguerons schéma implicite et schéma explicite. Les sections suivantes traitent des problèmes que provoquent la discrétisation.

## 1. Construction de schémas

### 1.1. Idée

Soit  $u$  une fonction d'une variable, de classe  $C^4$ . Si  $h$  tend vers 0, nous avons les deux formulations suivantes (formule de Taylor) :

$$\begin{aligned}u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{4}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \\u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{4}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

En combinant les deux équations, il vient naturellement :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1)$$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (2)$$

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3)$$

Et :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

L'équation (1) est appelée l'approximation à droite de  $u'(x)$  et l'équation (2) approximation à gauche de  $u'(x)$ . Ces deux équations sont cependant grossières puisqu'elles sont en  $\mathcal{O}(h)$ . L'équation (3), appelée approximation centrée de  $u'(x)$ , est plus précise puisqu'elle est en  $\mathcal{O}(h^2)$ . Quand à l'équation (4), il s'agit de l'approximation de  $u''(x)$  et elle est aussi en  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Passons maintenant en **dimension deux**. On considère maintenant  $u$  comme une fonction de deux variables de classe  $C^4$ . Le principe d'approximation des dérivées est exactement le même. Si  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent vers 0, nous avons:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{u(x,y) - u(x-\Delta x,y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x-\Delta x,y)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}$$

Et :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Il en est de même pour les dérivées par rapport à la variable  $y$ . Ces formules permettent de comprendre la discrétisation qui va s'effectuer sur les équations aux dérivées partielles.

## 1.2. Exemple de schéma pour une équation différentielle

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p(x)\frac{d}{dx}u(x) + q(x)u(x) = f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

Nous supposons  $p$ ,  $q$  et  $f$  suffisamment régulières avec  $q(x) > 0$ . Subdivisons le segment  $[0, 1]$  en  $N+1$  points. Le pas du maillage est :

$$h = \frac{1}{N}$$

Et les nœuds du maillage sont :

$$x_i = ih \quad i = 0, \dots, N$$

Le système est vérifié en chaque point du maillage :

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x_i) + p(x_i)\frac{d}{dx}u(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i)$$

Nous utilisons les approximations 3 et 4 :

$$-\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + p(x_i)\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

On néglige le terme  $\mathcal{O}(h^2)$ . En notant  $u_i$  la valeur approchée de  $u$  aux points  $x_i$ , on obtient :

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

Notons :

$$a_i = \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right), b_i = \left(\frac{2}{h^2} + q_i\right) \text{ et } c_i = \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right).$$

Nous aboutissons alors au système :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ 0 & a_3 & b_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - a_1\alpha \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} - c_{N-1}\beta \end{bmatrix}$$

Il reste à étudier l'ordre du schéma, sa consistance et sa convergence. Nous verrons plus tard dans ce chapitre comment faire.

### 3.2.3 Exemple de schéma pour une EDP simple

Considérons l'équation suivante (équation de la chaleur) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x, t) \in ]0, T[ \times ]0, 1[ \\ u(x, 0) = \Phi(x) & \text{condition initiale} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{condition limite} \end{cases}$$

On peut considérer qu'il s'agit de l'évolution de la température d'une barre soumise aux extrémités à une température nulle.

#### schéma explicite

Construisons un maillage régulier. on note  $x_j = j\Delta x$  avec  $j = 0, \dots, N$  et  $t_n = n\Delta t$ . On note  $u_j^n$  l'approximation de  $u(x_j, t_n)$ .

En utilisant pour la dérivée temporelle une approximation à droite, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

le schéma se pose alors :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} & j = 1, \dots, N-1 \\ u_j^0 = \Phi(x_j) & j = 1, \dots, N-1 \\ u_0^n = u_N^n = 0 & \forall n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On connaît les  $u_j^0$ , on en déduit les  $u_j^1$  et ainsi de suite jusqu'aux  $u_j^n$ . Ce schéma est dit explicite car les  $u_j^{n+1}$  se déduisent directement des  $u_j^n$ . Dans ce genre de schéma, aucun système d'équation n'est à résoudre (pas de matrice à inverser numériquement !!!), le nouveau pas se déduit des pas précédemment calculés.

#### schéma implicite

Discretisons la même équation avec le même maillage mais utilisons cette fois une approximation à gauche pour la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

Ce simple changement semble anodin. En fait les modifications engendrées sont très importantes. Observons le nouveau schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} & j = 1, \dots, N-1 \\ u_j^0 = \Phi(x_j) & j = 1, \dots, N-1 \\ u_0^n = u_N^n = 0 & \forall n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce schéma nécessite la résolution d'un système d'équations. Au temps  $t_n$  le système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ \beta & \alpha & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha & \beta \\ & & & & \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{u_{N-2}^{n-1}}{\Delta t} \\ -\frac{u_{N-1}^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha & \beta \\ & & & & \beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_N^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{u_{N-2}^{n-1}}{\Delta t} \\ -\frac{u_{N-1}^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_N^n \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha = -\frac{1}{\Delta t} - \frac{2D}{\Delta x^2}$  et  $\beta = \frac{D}{\Delta x}$ . Trouver les  $u_j^n$  à partir des  $u_j^{n-1}$  nécessite ici la résolution d'un système i.e. l'inversion d'une matrice. Le système est ici tridiagonal. On peut le résoudre facilement par l'algorithme de Thomas, spécialement adapté aux matrices bandes. Un tel schéma est implicite.

La discrétisation du problème induit plusieurs problématiques que nous étudions dans les sections suivantes. Nous y analyserons des problèmes de dimension 1. La valeur de  $u(t^n, x_j)$  y est toujours approximée par  $u_j^n$ .

### 3.3 Erreur de troncature

Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor. Par exemple, pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On utilise un schéma explicite centré en espace :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

En développant  $u_j^{n+1}$  et  $u_j^n$  par développement de Taylor, soustrayant les résultats et divisant le tout par  $\Delta t$ , on retrouve l'erreur de troncature sur le temps,  $\mathcal{O}(\Delta t)$ . En suivant le même principe avec le terme sur l'espace, on trouve une erreur en  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

Au final :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \text{E.T.}$$

avec E.T., l'erreur de troncature. L'ordre de l'erreur de troncature est  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ .

### 3.4 Consistance

Un schéma aux différences finies est consistant si :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \text{E.T.} = 0$$

Des problèmes peuvent se poser si l'erreur de troncature varie comme  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Dans ce cas, on est obligé de raffiner de sorte que  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$

### 3.5 Stabilité

Ce concept s'applique aux problèmes d'évolution. Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature,...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant.

Un schéma peut être :

- Inconditionnellement stable : Quels que soient  $\Delta t$  et  $\Delta x$  les erreurs causées par le schéma numérique n'explode pas au fil des itérations.
- Conditionnellement stable : On doit poser une condition sur  $\Delta t$  et  $\Delta x$  pour que la solution n'explode pas.
- Inconditionnellement instable : Quels que soient  $\Delta t$  et  $\Delta x$  les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.

### 3.6 Convergence

Un schéma convergent est un schéma *numériquement saint*. Une condition nécessaire à la convergence d'un schéma est :

$$\text{STABILITE} + \text{CONSISTANCE}$$

Ce théorème est applicable pour les EDP linéaires. On le suppose aussi valable dans le cas non linéaire.

### 3.7 Erreurs dues à la discrétisation

Il en existe deux types, les erreurs d'arrondi ( $\epsilon_{arro}$ ) et les erreurs de discrétisation ( $\epsilon_{disc}$ ). Les premières s'expliquent par le nombre fini de chiffres après la virgule et les secondes par les erreurs de troncature. On a :

$$|(\text{sol. exacte de l'EDP}) - (\text{sol. trouvée par l'ordinateur})| = |\epsilon_{arro} - \epsilon_{disc}|$$

### 3.8 Forme conservative

Une EDP posée sous forme conservative possède la particularité suivante : Ses coefficients ne se retrouvent pas dans les dérivées.

Par exemple :

	Forme non conservative	Forme conservative
Equ. de continuité $\rho$ et $u = f(x, t)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$
Equ. de la chaleur $\rho = \rho(\vec{x})$ $c = c(\vec{x})$ $k = k(\vec{x})$ $T = T(\vec{x}, t)$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$

Avantages de la forme conservative :

- Meilleure prise en compte des EDP avec coefficients non continus (ex : ondes de choc).
- Prise en compte du principe de conservation sur une **région finie**. Ceci implique la suppression de petites sources et de petits puits de matière (sauf aux bords du domaine).



**Equations  
différentielles  
aux dérivées  
partielles**

## Introduction

Les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans de nombreux domaines de physique, qui comprennent les problèmes de diffusion, les phénomènes de propagation, ainsi que le domaine de la mécanique des fluides décrite par les équations hydrodynamiques comme celles de Navier-Stokes et l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour la mécanique quantique. Ces équations différentielles n'ont généralement pas de solutions analytiques et une résolution numérique de ces équations est alors nécessaire. Une équation aux dérivées partielles est une relation liant une fonction de  $n$  variables à ses dérivées partielles. L'ordre de l'équation est donné par l'ordre le plus élevé des dérivées partielles apparaissant dans l'équation.

On distingue EDP linéaire et EDP non linéaire. Les EDP linéaires ne contiennent aucun produit de variable avec elle-même ou une de ses dérivées alors que les EDP non linéaires peuvent en posséder. Par exemple :

$$\begin{array}{l} \text{Equation de propagation} \\ \text{d'onde (linéaire) :} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Equation de Burgers} \\ \text{(non linéaire) :} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array}$$

Avec  $u$  qui dépend de  $x$  et de  $t$  et  $\nu$  une constante.

Dans ce cours, nous allons nous limiter aux équations aux dérivées partielles linéaires. Une première classification non exhaustive fait apparaître trois types d'équations : équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques. Cette classification se fait sur la base d'une équation d'ordre 2 standard :

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g(x, y)$$

où  $a, b, c, d, e, f$  sont fonctions de  $(x, y)$ . C'est une équation linéaire. Le type de l'EDP dépend de son discriminant,  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

- $\Delta > 0$  alors, l'EDP est hyperbolique.
- $\Delta = 0$  alors, l'EDP est parabolique.
- $\Delta < 0$  alors, l'EDP est elliptique.
-

**Equation hyperbolique** : La propagation des ondes dans un milieu continu (unidimensionnel) obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Où  $u(x, t)$  peut désigner une variable scalaire comme la densité locale  $\rho(x, t)$  ou une variable vectorielle comme la vitesse locale  $v(x, t)$ .

**Equation parabolique**. La diffusion de particules dans un milieu continu obéit à l'équation suivante

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

Où  $D$  est la constante de diffusion et  $\rho(x, t)$  la densité locale instantanée des particules diffusantes.

**Equation elliptique**. En dimensions deux, le potentiel coulombien induit par une densité de charges électriques satisfait l'équation suivante (avec des unités choisies de manière appropriée)

$$-\rho(x, y) = \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial y^2}$$

Où  $\rho(x, y)$  est la densité locale de charge et  $V(x, y)$  le potentiel électrostatique à déterminer.

### **Problème bien posé**

Le problème d'une EDP + condition aux limites (C.L.) + condition initiales (C.I.) est bien posé si la solution existe, si elle est unique et si elle dépend avec continuité des C.L. ou des C.I. ie, une petite dérivation dans les C.L. ou les C.I. produit une petite dérivation dans la solution. Cf : Hadamard, 1932

## Exemples d'EDP intéressantes

### 1. Equation d'onde linéaire d'ordre un

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Propagation d'une onde vers la droite à la vitesse  $c$ .

### 2. Equation de Burgers non-visqueuse

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Propagation d'onde non linéaire monodimensionnelle. La non linéarité est due au terme  $u \frac{\partial u}{\partial x}$

### 3. Equation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation est un modèle 1D de Navier-Stokes. Elle n'est pas linéaire.

### 4. Equation de Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Problème mixte : elliptique ou hyperbolique suivant le signe de  $y$ . Modélise par exemple les écoulements transsoniques non visqueux.

### 5. Equation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Conduction thermique dans un solide avec source  $f(x, y)$ .

### 6. Equation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

### 7. Equation de Korteweg-de-Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Ondes non linéaires dispersives.

### 8. Equation d'Helmoltz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K^2 u = 0$$

Ondes harmoniques en fonction du temps avec  $k$  le paramètre de fréquence. Exemple : propagation d'ondes acoustiques dans un milieu 2D.

## Equation de la chaleur

### 1. Présentation

L'équation de la chaleur est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cette équation sert de modèle pour les équations (paraboliques) de couche limite. Nous en présentons ici des schéma adaptés à la résolution de ce type d'EDP.

### 2. Equation de la chaleur 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

#### 2.1. Adaptation des schémas

Les techniques utilisées précédemment posent des difficultés. Voyons deux exemples significatifs :

##### 1. Simple schéma explicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right]$$

Pour résoudre l'évolution du système, on pose le schéma sous la forme :

$$u_{i,j}^{n+1} = Au_{i,j}^n + Bu_{i+1,j}^n + Cu_{i-1,j}^n + Du_{i,j+1}^n + Eu_{i,j-1}^n$$

avec :

$$\begin{cases} A = 1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ B = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ C = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ D = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ E = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ i \in [1, I] \\ j \in [1, J] \end{cases}$$



Chaque bloc est de taille  $(J * J)$  et :

$$M_g = \begin{pmatrix} C & 0 \\ & \ddots \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad M_D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ & \ddots \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} A & D & 0 \\ E & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & D \\ 0 & E & A \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas 1D, le vecteur  $V$  de taille  $(I * J)$  contient les conditions aux limites :

$$V = \begin{pmatrix} Cu_{0,1} + Eu_{1,0} \\ Cu_{0,2} \\ \vdots \\ Cu_{0,J} + Du_{1,J+1} \\ \hline Eu_{2,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{2,J+1} \\ \hline Eu_{3,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{l-1,J+1} \\ \hline Bu_{l+1,1} + Eu_{l,0} \\ Bu_{l+1,2} \\ \vdots \\ Bu_{l+1,J} + Du_{l,J+1} \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour résoudre ce genre de problèmes sous Matlab, il est intéressant de déclarer  $M$  comme une matrice creuse (sparse matrix). Dans un langage tel que le C ou Fortran on codera la matrice de façon *intelligente*. On ne rentrera que les bandes non nulles de la matrice et adaptera la multiplication matricielle au type de codage choisi.

La condition de stabilité de ce schéma est :

$$\alpha \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right] \leq \frac{1}{2}$$

En prenant  $\Delta x = \Delta y$ , la condition de stabilité est :

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Cette condition est encore plus restrictive que dans le cas 1D !

## 2.2. Equation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation est un modèle pour les équations de Navier Stokes incompressibles et stationnaires (équations elliptiques) et aussi pour les écoulements potentiels (irrotationnel, nonvisqueux et incompressible). Dans les équations de N-S incompressibles, on arrive souvent une équation de Poisson pour la pression en prenant la divergence de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(x, y)$$

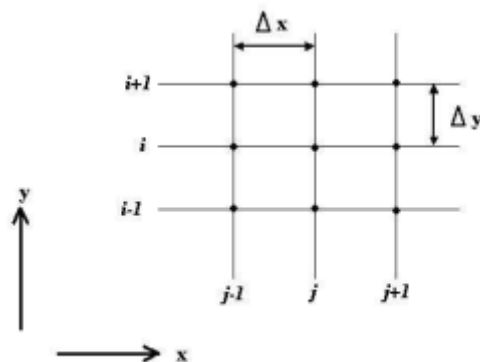
### 2.2.1. Formule à cinq points

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

l'erreur de troncature est d'ordre  $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$  et l'équation modifiée est :

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{12}[u_{xxxx}(\Delta x)^2 + u_{yyyy}(\Delta y)^2] + \dots$$

Une formule à points peut être générée facilement avec comme erreur de troncature  $O(\Delta x^4, \Delta y^4)$



Toutefois, l'erreur de troncature diminue rapidement pour les équations elliptiques plus générales, et il est de plus difficile de garder la précision près d'une frontière.



Supposons une grille uniforme ( $\Delta x = \Delta y$ ) avec un nombre de points égal suivant les  $x$  et le  $y$  ( $=N$ ). L'équation aux différences s'écrit :

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

pour chaque point où la solution  $(i,j)$  est recherchée.

Si les C.L. sont de type Dirichlet et la solution est connue sur les quatre frontières, alors il reste  $N^2$  points où la solution n'est pas connue. Pour chaque point, on écrit l'équation aux différences. On a donc  $N^2$  équations linéaires algébriques pour les  $N^2$  inconnues :

$$[A][\vec{u}] = [\vec{C}]$$

La matrice  $[A]$  (de taille  $(N^2 * N^2)$ ) contient beaucoup de zéros ! Pour résoudre ce système, on peut utiliser une méthode directe (Gauss, Choleski...) ou une méthode itérative (Gauss-Seidel, surrelaxation, ADI).

### 1.4.1 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant le point  $t_0$ , le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit :

trouver une fonction réelle  $x(t) \in \mathcal{C}^1(I)$  solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $f(t, x)$  est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit  $S = I \times ]-\infty, +\infty[$  et continue par rapport aux deux variables. Si  $f$  ne dépend pas explicitement de  $t$  (*i.e.*  $f(t, x(t)) = f(x(t))$ ), l'équation différentielle est dite *autonome*.

On obtient en intégrant (1.7) entre  $t_0$  et  $t$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I. \quad (1.8)$$

La solution de (1.7) est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et satisfait l'équation intégrale (1.8). Inversement, si  $x(t)$  est définie par (1.8), alors elle est continue sur  $I$  et  $x(t_0) = x_0$ .

### 1.4.5 Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles

Dans cette section nous faisons l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec conditions aux limites de la forme :

$$y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \quad y(a) = y_a \quad \text{et} \quad y(b) = y_b. \quad (1.13)$$

On suppose les fonctions  $(a_i(x))$  suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles que nous rencontrons.

La différence entre les équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites est que dans le premier cas, à  $t = t_0$ , la fonction  $y(t_0)$

**Introduction à  
la méthode  
des éléments  
finis**

## Méthode des Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis (MEF) n'a rien d'original en soi. Il s'agit simplement d'une combinaison d'ingrédients qui permettent d'obtenir une méthode bien adaptée à la résolution approchée par ordinateur de problèmes de physique.

### 1. Intérêts

On a vu que la méthode de Galerkin appliquée à la formulation faible du problème ou la méthode de Ritz appliquée à la minimisation d'une fonctionnelle conduisent à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{K} q = f \quad (1)$$

où les termes de la matrice  $\mathbf{K}$  s'écrivent sous la forme :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{L}(\phi_j) d\Omega$$

Par exemple.

Tout d'abord, le calcul des termes  $K_{ij}$  nécessite l'intégration sur le domaine  $\Omega$ . On imagine bien que, dans le cas de domaines 2D ou 3D de formes complexes, le calcul de ces intégrales peut être très délicat.

Dans la MEF, les fonctions de base ont pour support de définition les éléments du maillage. De plus ces éléments ont des formes simples (segments, triangles, quadrangles, tétraèdres, ...). Les intégrations peuvent se faire sur les éléments, élément par élément, en remarquant que :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega \simeq \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_{E_i}} \dots d\Omega_{E_i} \quad (2)$$

où  $M$  est le nombre d'éléments du maillage et  $\Omega_{E_i}$  le domaine couvert par le  $i$ -ème élément. La relation précédente n'est pas toujours une égalité car, dans le cas de domaines de forme complexe, la couverture du domaine par les éléments n'est pas forcément exacte comme le montre la figure 1.

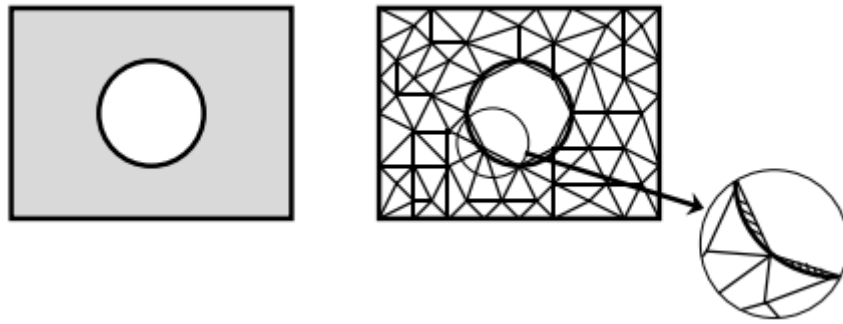


FIG. 1 – Approximation dans le couverture du domaine

Dans la pratique, les intégrales sont calculées numériquement, mais de manière exacte, en utilisant des techniques d'intégration numérique telles que la *Méthode de Gauss* par exemple.

Ensuite, les termes  $K_{ij}$  ou  $f_i$  sont associés à des fonctions de base  $\phi_i$  ou  $\phi_j$ . Les fonctions étant toutes différentes (par nature), les calculs à effectuer sont tous différents. Cette différence de traitement des termes n'est pas très pratique pour un traitement numérique du problème.

Dans le cas de la MEF, les fonctions sont aussi toutes différentes, bien qu'elles aient des formes (*chapeau*) identiques, les fonctions associées à des points d'interpolation du bord sont différentes des fonctions associées à des points intérieurs. Par contre, on remarque que lorsqu'on considère la trace des fonctions sur les éléments, toutes les représentations *élémentaires* ont la même forme. Cela est illustré en dimension un sur la figure 2 et en dimension deux sur la figure 3.

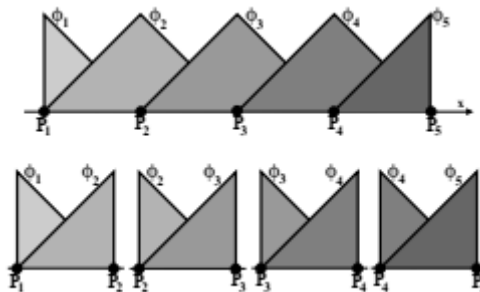


FIG. 2 – Découpage en éléments 1D

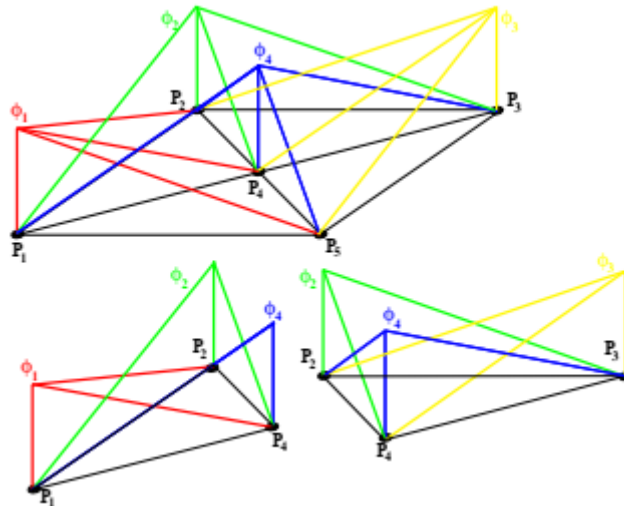


FIG. 3 – Découpage en éléments 2D

## 2. Mise en œuvre

### 2.1 Principe

Les différents termes de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  et du vecteur des forces généralisées  $f$  sont construits élément par élément à l'aide de la propriété (2). D'autre part, sur un élément donné, les seules fonctions de base non nulles sont celles associées aux nœuds sommets de l'élément. Ainsi, les informations nécessaires pour la construction des termes de raideur et de force généralisée sur l'élément sont purement locales à l'élément. La matrice de raideur  $\mathbf{K}$  est donc construite comme un assemblage de *matrices de rigidité élémentaires*. Il en va de même pour le vecteur des forces généralisées  $f$  construit comme un assemblage de *vecteurs forces généralisées élémentaires*.

Tous les éléments ayant la même structure, le principe de construction des termes élémentaires est commun à tous les éléments. Il s'agit donc de le définir une fois pour toute et de l'appliquer ensuite à chacun des éléments.

La définition d'une méthode des éléments finis pour un type de problème donné passe donc par une première phase de définition des principes de construction des termes élémentaires appelée *écriture de l'élément*.

## 2.2 Différentes étapes de l'écriture d'un élément

A. Choix de la géométrie de l'élément.

**1D** *segments* droits ou courbes.

**2D** *triangles, quadrangles* à bords droits ou courbes.

**3D** *tétraèdres, pyramides, prismes, cubes* droits ou courbes.

B. Choix des fonctions de base et des inconnues.

C. Expression des champs et de leurs dérivées.

D. Calcul de la matrice de raideur élémentaire.

E. Calcul des vecteurs forces généralisés élémentaires associés aux différentes conditions aux limites.

### 6.2.3 Différentes étapes de la résolution d'un problème

I. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques.

II. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base.

III. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale.

IV. Calcul du vecteur des forces généralisées : idem.

V. Prise en compte de CL sur les inconnues.

VI. Résolution du système linéaire.

VII. Détermination du champ en tout point.

VIII. Calcul des dérivées sur les éléments.

IX. Détermination des réactions aux limites.

# Références

- [1] Mazen Saad, analyse numérique, Ecole Centrale de Nantes Département info/Math, Lyon, 2012
- [2] Jean-Louis Merrien, Analyse numérique avec MATLAB, Dunod, Paris, 2007.
- [3] Risser Laurent, Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides, 2006.
- [4] Pascal Viot, Méthodes d'analyse numérique cours du DEA\ Modélisation dynamique et statistique des systèmes complexes, Laboratoire de Physique Théorique des Liquides, Paris, 2003.
- [5] L. Champaney, Méthodes d'Approximation de Solution pour les Problèmes de Physique. Université de Versailles St-Quentin en Yvelines, Département de Mécanique 2005.