4) اختبار المعنوية الكلية لنموذج الانحدار الخطي البسيط: اختبار فيشر F:

يهدف اختبار جودة النموذج أي هل النموذج صالح أم لا، فإننا نستعين باختبار فيشر حيث نضع:

$$\begin{cases} H_0: \alpha_0=\alpha_1=0 \to \text{النموذج غير صالح} \\ H_1: \alpha_1 \neq 0 \to \text{النموذج صالح (مقبول)} \end{cases}$$

- نقارن بين إحصائية فيشر المحسوبة F^* مع إحصائية فيشر الحرجة أو الجدولية F_t حيث

$$F^* = \frac{\frac{ESS}{1}}{\frac{RSS}{n-2}} = \frac{\frac{\sum(\hat{y}-\bar{y})^2}{1}}{\frac{\sum \varepsilon_t^2}{n-2}} = \frac{R^2/1}{\frac{(1-R^2)}{(n-2)}}$$

$$F^* = \frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)} \rightsquigarrow F_{k,n-k-1}$$

k: عدد المتغيرات المستقلة

* إذا كانت $F_c^* < F^{\alpha}_{1,n-2}$: نقبل الفرضية العدمية ونقول أن مجموع مربعات الانحرافات المفسرة غير معنوي أو لا يختلف معنويا عن الصفر عند مستوى احتمال $\alpha\%$ وهذا يدل على عدم جودة النموذج.

* إذا كانت $F^* > F^{\alpha}_{1,n-2}$: نرفض الفرضية العدمية ونقول أن مجموع مربعات الانحرافات المفسرة معنوي أو يختلف معنويا عن الصفر عند مستوى احتمال $\alpha\%$ وهذا ما يدل على جودة النموذج المقدر

ملاحظة: في حالة الانحدار الخطي البسيط لدينا:

$$t^*_{\hat{\alpha}_1} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$F^* = (t^*_{\hat{\alpha}_1})^2 = \frac{\hat{\alpha}_1^2 \times \sum(X_t-\bar{X})^2}{\sum \varepsilon_t^2/(n-2)}$$

مثال: باستعمال المثال السابق قم بتحليل وإنشاء جدول التباين

- احسب معامل التحديد، هل للنموذج قدرة تفسيرية عالية؟
- اختبر المعنوية الكلية للنموذج

تعطى $F^{0.05}_{1,5} = 6.60$

الحل:

لدينا معادلة تحليل التباين

$$TSS = ESS + RSS$$

و $RSS = \sum(y_t-\hat{y})^2 = \sum \varepsilon_t = 1.32$

$$TSS = \sum(y_t-\bar{y})^2 = 95.05$$

ومنه $ESS = TSS - RSS = 95.05 - 1.32 = 93.73$

جدول تحليل التباين

مصدر التغير	مجموع مربعات الانحرافات	درجة الحرية	متوسط مربعات الانحرافات
المتغير المستقل X	$ESS = 93.73$	1	$ESS/1 = 93.73$
البواقي e	$RSS = 1.32$	$n-2 = 7-2 = 5$	$RSS/5 = 0.26$
المجموع	$TSS = 95.05$	$n-1 = 7-1 = 6$	$F^*_{\text{محسوب}} = \frac{ESS/1}{RSS/n-2}$

- حساب معامل التحديد R^2:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{1.32}{95.05} = 0.986$$

ومنه يمكن القول بأن الدخل المتاح يفسر الاستهلاك

بنسبة 98,61 % وبالتالي لنموذج الاستهلاك قدرة تفسيرية عالية

أو نقول أن 98,61 % من التغير في الاستهلاك (المتغير التابع) يفسر بالتغير في الدخل (المتغير المستقل)

* اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

اختبار فيشر: نضع

$$\begin{cases} H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \rightarrow \text{النموذج غير مقبول} \\ H_1: \alpha_1 \neq 0 \rightarrow \text{النموذج مقبول} \end{cases}$$

$$F_c = F^* = \frac{R^2}{(1-R^2)}(n-2)$$

$$= \frac{0.9861}{(1-0,9861)} \times (7-2)$$

$$F^* = 354$$

ومنه $F_c = F^* = 354 > F^{0.05}_{(1,5)} = 6.60$ ⇐ نرفض الفرضية الصفرية أي أن للنموذج معنوية إحصائية عند مستوى 5% (النموذج مقبول)

5] التنبؤ في إطار نموذج الانحدار الخطي البسيط

عقب تقييم نموذج الانحدار والتأكد من استيفائه للفرضيات والمعايير الاحصائية، يصبح بالإمكان استخدامه لأغراض التنبؤ، وذلك بإيجاد قيم المتغير التابع Y بتغيير قيم المتغير المستقل X ومنه نستعمل النموذج التالي:

$$\hat{y}_{t+h} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{t+h}$$

$\hat{Y}_{t+h}$: التنبؤ التقديري عند الفترة t+h

- تباين التنبؤ التقديري (القيمة المقدرة لـ Y عند الفترة t+h) (القيمة المتنبأ بها)

$$Var(\hat{y}_{t+h}) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+h}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2}\right) = \hat{\sigma}^2_{\hat{y}_{t+h}}$$

- تباين خطأ القيمة المتنبأ بها

$$Var(\hat{\varepsilon}_{t+h}) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_{t+h}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+h}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2}\right]$$

- مجال الثقة للقيمة المتنبأ بها $\hat{y}_{t+h}$

$$y_{t+h} \in \left[\hat{y}_{t+h} - t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon_{t+h}} ; \hat{y}_{t+h} + t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon_{t+h}}\right]$$

$$y_{t+h} = \hat{y}_{t+h} \pm t^{\frac{\alpha}{2}}_{n-2} \times \hat{\sigma}_{\varepsilon_{t+h}}$$

مثال: بالرجوع إلى المثال السابق، تنبأ بالاستهلاك لسنة 2008، وذلك إذا علمت أن القيمة المستقبلية للدخل المتاح لسنة 2008 هي $X_{2008} = 98$

~~احسب تباين القيمة المتنبأ بها $\hat{y}_{2008}$~~

- احسب تباين القيمة المتنبأ بها $\hat{y}_{2008}$
- انشئ مجال ثقة للتنبؤ عند مستوى معنوية 5%

الحل: لدينا

$$\hat{y}_t = 0.21 x_t + 10.89$$

ومنه

$$\hat{y}_{t+h} = 0.21 x_{t+h} + 10,89$$

لما t=2007 و h=1 ومنه

$$\hat{y}_{2007+1} = 0.21 X_{2007+1} + 10.89$$

$$\hat{y}_{2008} = 0.21 X_{2008} + 10.89$$

$$\hat{y}_{2008} = 0.21(98) + 10.89$$

$$\hat{y}_{2008} = 31,47$$

- حساب تباين القيمة $\hat{y}_{2008}$

لدينا $Var(\hat{y}_{2008}) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{2008} - \bar{X})^2}{\sum(X_t - \bar{X})^2}\right]$

ومنه

$$Var(\hat{y}_{2008}) = 0{,}26\left[\frac{1}{7} + \frac{(98 - 60{,}57)^2}{2114{,}25}\right]$$

$$Var(\hat{y}_{2008}) = 0{,}209$$

- بناء مجال الثقة للقيمة $\hat{y}_{2008}$ عند مستوى 5%

$$y_{2008} \in \left[\hat{y}_{2008} - t_5^{0{,}025} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{2008}} ; \hat{y}_{2008} + t_5^{0{,}025} \times \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{2008}}\right]$$

* نحسب $\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}_{2008}}$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}_{2008}} = Var(\hat{\varepsilon}_{2008}) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{2008} - \bar{X})^2}{\sum(X_t - \bar{X})^2}\right]$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}_{2008}} = 0{,}26\left[1 + \frac{1}{7} + \frac{(98 - 60{,}57)^2}{2114{,}25}\right]$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\varepsilon}_{2008}) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}_{2008}} = 1{,}80$$

$$\Rightarrow \sqrt{1.80} = 1{,}34$$

ومنه

$$y_{2008} \in [31{,}47 - 2.57 \times 1{,}34 ; 31{,}47 + (2.57 \times 1{,}34)]$$

ومنه

$$y_{2008} \in [28{,}02 ; 34{,}91]$$

[6