Université de M'sila.

Faculté de Technologie.

Matière : TP Méthodes Numériques.

TP N° 1 : Résolution de l'équation $f(x) = 0$
Méthode de Dichotomie.

$2^{ème}$ **Année ST (LMD) : (2019/2020).**

1 But :

Le problème est de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction non linéaire, le plus souvent continue et dérivable, sur un intervalle I. dans le cas général, en utilisant des méthodes itératives, qui donnent une suite d'approximations successives s'approchant de la solution exacte.

2 Principales méthodes de résolutions approchées de $f(x) = 0$:

On considère un intervalle $[a, b]$ et une fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]a, b[$.

2.1 Méthode de Dichotomie :

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers la racine α de la manière suivante :

Principe :

On prend pour x_0 le milieu de l'intervalle $[a, b], (x_0 = \frac{a+b}{2})$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a, x_0[$ ou $]x_0, b[$ ou bien elle est égale à x_0.

1 Si $f(x_0) = 0$, c'est la racine de f et le problème est résolu.

2 Si $f(x_0) \neq 0$, nous regardons le signe de $f(a) \times f(x_0)$.

  (a) Si $f(a) \times f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, x_0[$.

  (b) Si $f(x_0) \times f(b) < 0$, alors $\alpha \in]x_0, b[$.

On recommence le processus en prenant l'intervalle $[a, x_0]$ au lieu de $[a, b]$ dans le premier cas, et l'intervalle $[x_0, b]$ au lieu de $[a, b]$ dans le second cas. De cette manière, on construit par récurrence sur n trois suites $(a_n), (b_n)$ et (x_{0n}) telles que $a_1 = a, b_1 = b$ et telles que pour tout $n \geq 0$,

- Si $f(a) \times f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, x_0[$. On pose $a_1 = a, b_1 = x_0$.
- Si $f(a) \times f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
- Si $f(a) \times f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0, b[$. On pose $a_1 = x_0, b_1 = b$.

On prend alors pour x_1 le milieu de $[a_1, b_1]$.

On construit ainsi une suite $x_0 = (a + b)/2, x_1 = (a_1 + b_1)/2, ..., x_{0n} = (a_n + b_n)/2$ telle que $|\alpha - x_n| = (b - a)/(2n + 1)$.

[1]

Étant donné une précision ϵ, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations. L'algorithme ci-dessus s'appelle l'algorithme de DICHOTOMIE.

3 Jeux de données :

On travaillera avec les fonctions et intervalles suivants :

1.
$$\begin{cases} f_1(x) = x - e^{\sin(x)} \\ \text{[a,b]} \in [1,10] \end{cases} \tag{1}$$

2.
$$\begin{cases} f_2(x) = x^3 - 12x^2 - 60x + 46 \\ \text{[a,b]} \in [0,1] \end{cases} \tag{2}$$

3.
$$\begin{cases} f_3(x) = x^3 - 12x + 1 \\ \text{[a,b]} \in [0,1] \end{cases} \tag{3}$$

4.
$$\begin{cases} f_4(x) = \cos(x) - x^3 \\ \text{[a,b]} \in [0,1] \end{cases} \tag{4}$$

4 Travail à réaliser

Écrire les programmes sous MATLAB permettant d'appliquer la méthode en question aux fonctions précédemment définies.
On prendra un test d'arrêt de la forme $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, et on prendra soin de prévoir un compteur d'itérations qui permettra d'interrompre le traitement dès que N_{max} d'itérations sont effectuées sans que la précision ϵ ne soit atteinte. On pourra prendre par exemple $N_{max} = 100$.
- Les données seront a, b, ϵ, N_{max} et la fonction utilisée ; Les résultats seront la racine obtenue ainsi que son image par la fonction utilisée, le nombre d'itérations effectuées, et l'erreur de calcul.
- Tester sur les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 pour $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ et 10^{-12}.

1. **Présence aux T.P.** : La présence aux T.P. est obligatoire. Toute absence devra être valablement justifiée et donnera lieu à un rattrapage.

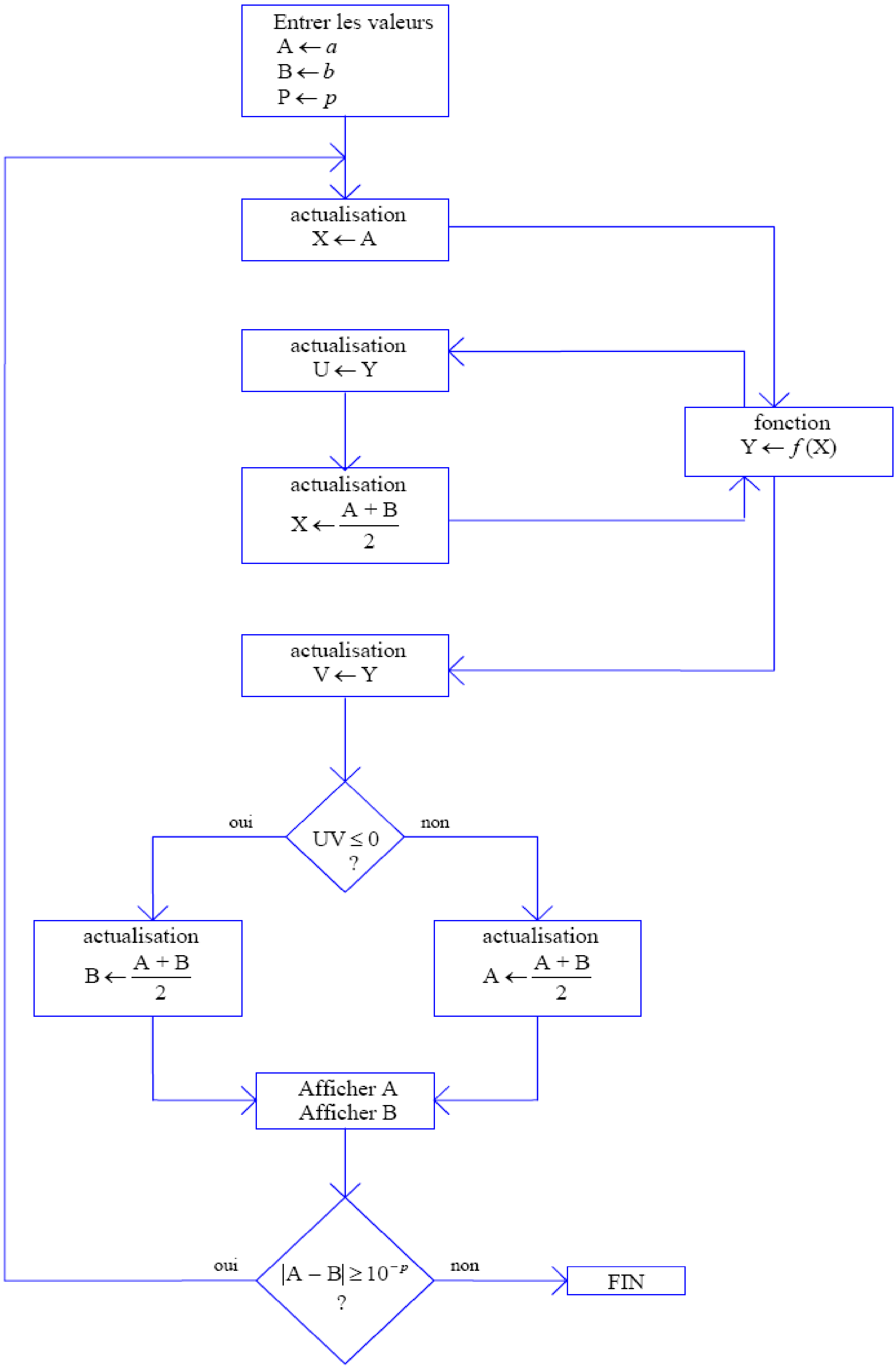

Fig.1. Algorithme de Dichotomie (Organigramme).