

UNIVERSITE DE M'SILA
Faculté de Technologie
Département de Science et Technique

Année universitaire : 2023/2024
Module : TP-Méthodes numériques S4 -
2^{ème} Année STS

TP N°: 02 Méthode du Point fixe

But : Dans ce TP, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations non linéaires de type $g(x) = x$, où g est une fonction non linéaire. Pour résoudre ce type de problème, on utilise la méthode du point fixe (résolution d'équations du type $g(x) = x$)

Cette méthode numérique est une méthode itérative : à partir d'une donnée x_0 , on construit x_1 puis x_2 , puis, pas à pas, les premiers termes de la suite $(x_k), k \in \mathbb{N}$.

Critère d'arrêt de l'algorithme

Numériquement il faut pouvoir arrêter l'algorithme une fois que celui-ci a convergé, c'est à dire une fois que x_n est suffisamment proche de la solution exacte (notée \bar{x}). Nous allons pour cela définir des critères d'arrêt. Pour une tolérance $\varepsilon > 0$ donnée, il faudrait pouvoir vérifier que le module de la différence entre la solution exacte et la solution approchée est inférieur à ε , c'est à dire que :

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

Cependant, comme, en général, la solution exacte \bar{x} n'est pas connue, ce critère n'est pas exploitable numériquement. Il existe quand même deux types de critères d'arrêt utilisables en pratique :

1. Contrôle du résidu : les itérations s'achèvent dès que :

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (\text{ou } |g(x_n) - \bar{x}| < \varepsilon)$$

2. Contrôle de l'incrément : les itérations s'achèvent dès que :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Nombre maximal d'itérations

En plus d'un de ces critères d'arrêt, il faut pouvoir arrêter l'algorithme lorsque celui-ci diverge ou lorsque la convergence est trop lente. On va alors définir le nombre d'itérations maximal n_{max} . L'algorithme s'arrêtera dès que $n > n_{max}$.

Calcul de l'erreur

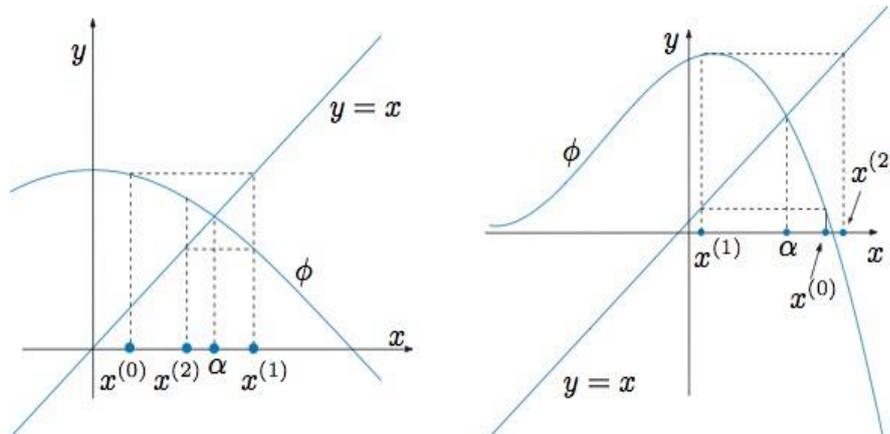
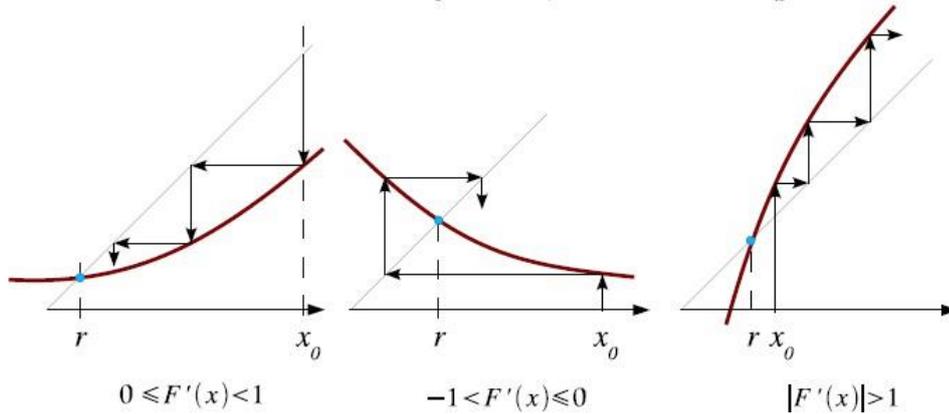
Le calcul de l'erreur sert d'une part à vérifier les estimations théoriques, et, d'autre part à comparer la vitesse de convergence différentes méthodes pour approcher la solution exacte \bar{x} . Ainsi, en plus du calcul d'une approximation de \bar{x} on a parfois besoin de calculer l'erreur à chaque étape de l'algorithme $|e_n| = |x_n - \bar{x}|$.

De nouveau, en général, \bar{x} n'est pas connue (même si \bar{x} est connue sa valeur sera approchée par l'ordinateur (par exemple si $\bar{x} = pi$)). En pratique, on calculera un vecteur e tel que $e_n = |x_n - \bar{x}_a|$.

– x_a vaut \bar{x} si \bar{x} est connue.

– \bar{x}_a est une valeur approchée de \bar{x} aussi précise que possible (calculée avec une tolérance ε très petite) sinon.

FIGURE 1. Méthode de point fixe, différents cas de figure



Algorithmique

On souhaite calculer une valeur approchée d'un point fixe d'une fonction g à partir de **choix d'un point x_0 donné**. Le point fixe doit être calculé avec une précision de ε donnée.

- Quels sont les paramètres d'entrée ? quels sont les paramètres de sortie ?
- Définir un critère d'arrêt pour cet algorithme.
- Ecrire l'algorithme complet de la fonction PointFixe.m.
- Ecrire l'algorithme d'une fonction supplémentaire ayant un paramètre d'entrée supplémentaire x_a et un paramètre de sortie supplémentaire le vecteur e .

Travail à réaliser :

Ecrire la fonction pintfixe.m par Matlab en se basant sur :

a). Les entrées Les sorties :

g : la fonction étudiée
zero : la racine trouvée par la méthode.
x0 : le point initial
erreur : l'erreur estimée.
Nmax : le nombre maximal d'itérations
niter : le nombre d'itérations effectuées.
tol : le critère d'arrêt (erreur tolérée)

b). Algorithme :

1. On commence par choisir le point initial x_0 ($n=0$)
2. On calcule $x_{n+1} = g(x_n)$
3. Si $|x_{n+1} - x_n| < tol$ alors la méthode a convergé, et on s'**arrête**
4. Si ***niter*** atteint ***nmax*** alors la méthode a divergé, ou elle n'a pas pu converger avec ***nmax*** itérations et on s'**arrête**.
5. Sinon, on passe à l'étape **2** pour une nouvelle itération $n+1$ (n devient $n+1$).

Application :

a). Considérons l'équation non linéaire : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, qui admet une racine x_0 dans l'intervalle $[1, 2]$.

Trouvez trois façons d'écrire $f=0$ sous la forme d'un point-fixe (g_1, g_2 et g_3) ?

1. on fait un plot des (g_1 avec x), (g_2 avec x) et (g_3 avec x).
2. Appliquez la fonction Matlab 'pointfixe.m' que vous avez créée sur $g_1(x), g_2(x)$ et $g_3(x)$, en mettant : $x_0=1.5, tol=0.001, nmax=50$.

3. Quelle est la fonction (g_1, g_2 ou g_3) qui donne la convergence la plus rapide.

b). Toujours en Matlab, coder la méthode *Pointfixe.m*

1. Appliquer l'algorithme du point fixe pour trouver les zéros de $h(x) = 2\sin x - x$ en prenant $x_0 = [1.5, 2]$. Après le plot de $g(x)$ *hold on* avec le plot de x .

2. Remarquer que 0 est un point fixe de h . Appliquer l'algorithme du point fixe à h en prenant $x_0=0.01$ puis $x_0=-0.01$. Que se passe-t-il ? Expliquer.

Exercice :

On utilise le Matlab, appliquer la méthode du point fixe pour résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = x - \cos(x).$$