

Extremums

L2 Maths

Module: Analyse 4

Remarque 1



L'exercice noté par (★) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Exercice 1



On considère l'application f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$.

1. Justifier que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 et préciser son gradient, en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de l'application f .
3. Étudier les extrema éventuels de f , en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).

Exercice 2



Soit la fonctions f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Donner leur nature (extremum local, point selle ...).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f .

Exercice 3



Soit la fonctions $f : (x, y) \mapsto x \ln^2 x + y^2$

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. (a) Trouver les points critiques de f .
(b) Déterminer leur nature.
3. (a) Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global.
(b) f admet-elle un maximum global?

Exercice 4



Déterminer les points stationnaires et leurs natures dans les cas suivants

1. $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2$.
2. $f(x, y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$.
3. $f(x, y, z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$. (★)

Exercice 5

Étudier les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ dans les cas suivants:

1. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x, y) = x + y - 4 = 0$
2. $f(x, y) = 10\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{y}$ et $g(x, y) = \frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{3} \ln y - 3$. (★).

Exercice 6

Soit la fonctions f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x + y + z$. On cherche le maximum de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

1. Expliquer pourquoi ce maximum existe.
2. Ecrire le Lagrangien associé au problème.
3. Déterminer alors le point où le maximum est atteint et la valeur de ce maximum.

Exercice 7

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \end{aligned}$$

où les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x, y) = x^2 + y = 1$.

1. Déterminer les points critiques du Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ associé au problème.
2. En utilisant l'équation de la contrainte, exprimer f en fonction de la variable x seulement.
3. Étudier la fonction obtenue et en déduire les natures des points critiques.
4. La fonction f admet-elle un maximum global sous la contrainte ?

Exercice supplémentaire 1

Soit la fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x + y + z. \end{aligned}$$

où les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x, y) = x^2 + y = 1$.

1. Déterminer les points critiques du Lagrangien $L(x, y, z, \lambda)$ associé au problème.
2. En utilisant l'équation de la contrainte, exprimer f en fonction de la variable x seulement.
3. Étudier la fonction obtenue et en déduire les natures des points critiques.
4. La fonction f admet-elle un maximum global sous la contrainte ?