Chapitre III *Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces*

Objectif

L'objectif est de calculer des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact. Le champ d'applications est très large et concerne par Application le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs. Nous introduirons le principe d'Archimède qui est un des outils indispensable au calcul des efforts exercés par un fluide sur un corps immergé ou partiellement immergé.

III.1 Poussée d'Archimède

Vous avez tous observé qu'une petite pièce de monnaie jetée dans une alors que d'immenses paquebots flottent à la surface des mers. Ceci s'explique en considérant la poussée d'Archimède.

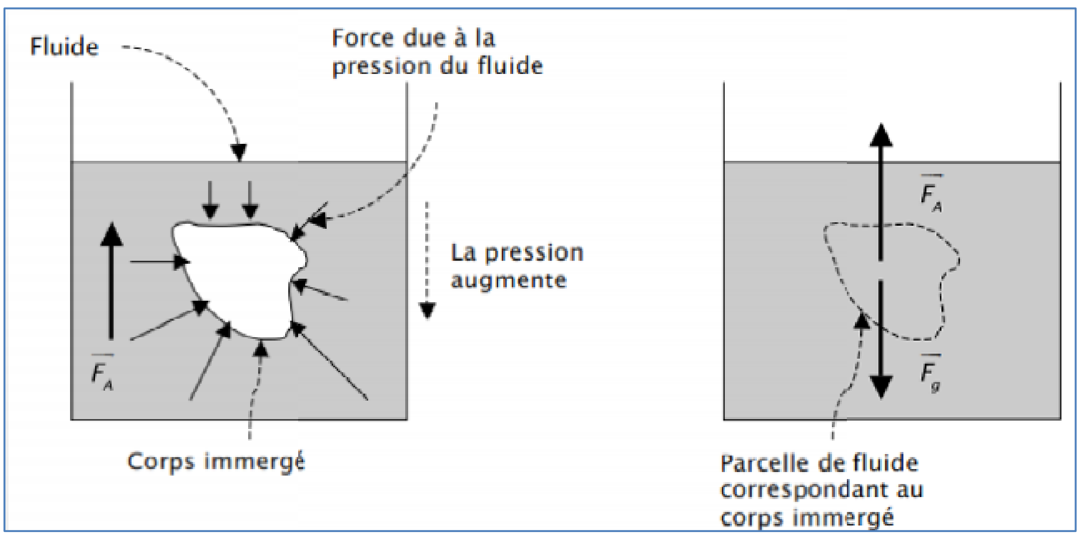


Figure 1: Poussée d'Archimède

On considère un corps immergé dans l'eau. Il subit au niveau de sa surface les forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure avec la profondeur, le corps est soumis globalement à une force qui est dirigée vers le haut et qui peut compenser la force de gravité (le poids) dirigée vers le bas. Cette force notée $\overrightarrow{F_A}$ est la poussée d'Archimède qui est égale au volume de fluide déplacé.

Pour déterminer la norme de $\overrightarrow{F_A}$, il faut noter que les forces de pression qui s'exercent sur le corps **V** , ne dépendent que de sa forme géométrique extérieure et non pas de sa composition interne (répartition de masse, présence de cavités etc…).

En équilibre, son poids $\overrightarrow{\boldsymbol{F_g}}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{F_g}} = \boldsymbol{\rho_{corps}}.\boldsymbol{V}.\vec{\boldsymbol{g}}$ est compensé par la résultante des forces de pression due a la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_A}} = -\boldsymbol{\rho_{fluide}}.\boldsymbol{V_{immerg\acute{e}}}.\vec{\boldsymbol{g}}$$

Théorème d'Archimède

Les forces de pression exercées par un fluide quelconque au repos sur un corps immergé en son sein ont une résultante, appelée poussée d'Archimède, opposée au poids du « fluide déplacé ». $\overrightarrow{\boldsymbol{F_A}} = -\boldsymbol{\rho_{fluide}}.\boldsymbol{V_{immerg\acute{e}}}.\vec{\boldsymbol{g}}$

Flotter ou couler ?

1) $\boldsymbol{F_A} = \rho_{\text{fluide}}\, V\, g > \boldsymbol{F_g} = \rho_{\text{corps}}\, V\, \vec{\boldsymbol{g}}$ soit $\rho_{\text{fluide}} > \rho_{\text{corps}}$ le corps flotte
2) $\boldsymbol{F_A} = \rho_{\text{fluide}}\, V\, g < \boldsymbol{F_g} = \rho_{\text{corps}}\, V\, \vec{\boldsymbol{g}}$ soit $\rho_{\text{fluide}} < \rho_{\text{corps}}$ le corps coule
3) $\boldsymbol{F_A} = \rho_{\text{fluide}}\, V\, g = \boldsymbol{F_g} = \rho_{\text{corps}}\, V\, \vec{\boldsymbol{g}}$ soit $\rho_{\text{fluide}} = \rho_{\text{corps}}$ équilibre

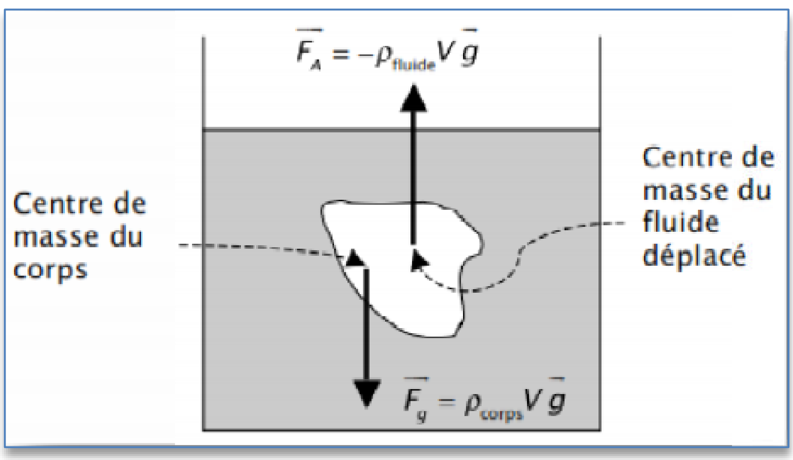


Figure 2 : Etats d'équilibres

Remarques

La poussée est appliquée au centre de masse du fluide déplacé appelé centre de poussée. Il faut bien noter qu'en général, le point d'application correspond au centre de masse du fluide déplacé qui est différent du centre de masse du corps immergé, où s'applique son poids.

1er cas : Si le solide immergé est homogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.

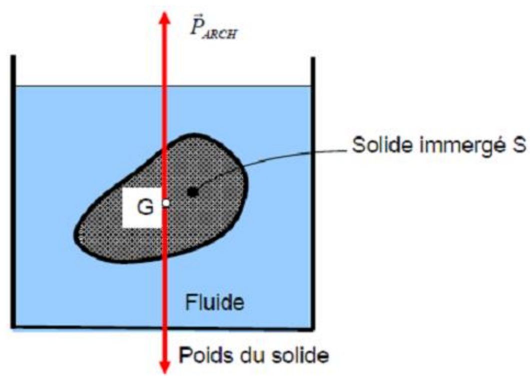


Figure 3 : Principe d'Archimède (solide immergé est homogène)

2ème cas : Si le solide immergé est hétérogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité G_S du solide. L'équilibre du solide est stable si G est au-dessus de G_S. L'équilibre du solide est instable si G est au dessous de G_S.

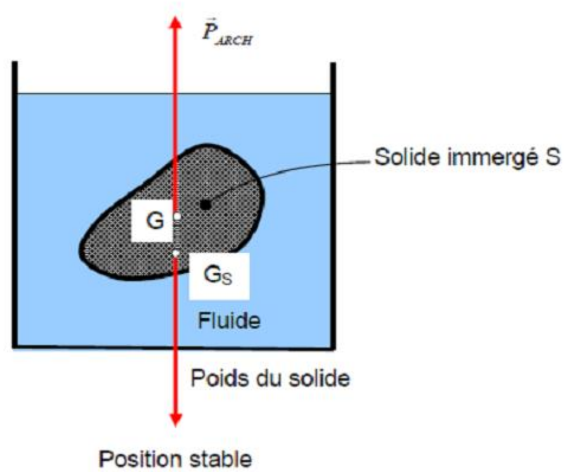
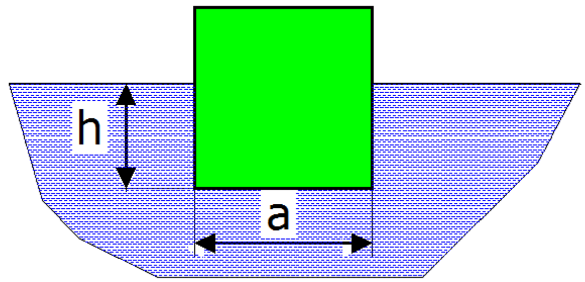


Figure 4: Principe d'Archimède (solide immergé est hétérogène)

Application : Un cube en acier de côté a=50 cm flotte sur du mercure. On donne les masses volumiques :

- de l'acier ρ_1= 7800 kg/m3
- du mercure ρ_2= 13600 kg/m3

1) Appliquer le théorème d'Archimède,
2) Déterminer la hauteur h immergée.



<u>Réponse</u> :

1) Théorème d'Archimède : la poussée d'Archimède est égale au poids du volume déplacé :

$P_{Arch} = a^2.h.\rho_2.g$

2) Equation d'équilibre :

$$P_{Arch} = \text{Poids}$$

Donc

$$a^2.h.\rho_2.g = a^3.\rho_1.g$$

Équivaut à $h = \frac{\rho_1}{\rho_2}.a$

$h = \frac{7800}{13600}.50 = 28.676 \text{ cm}$

III.2 Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques)

La poussée hydrostatique sur une paroi provient des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface, exemple : réservoir, piscine, vanne, barrage d'eau, bonde de vidange...

La pression du fluide sur la surface est caractérisée par :

a- **Force de poussée hydrostatique** $(\vec{F})$: Les forces élémentaires dF, exercées sur la paroi sont toutes parallèles et admettent donc une résultante $\vec{F}$ normale à la paroi.

b- **Centre de poussée (*D*)** : C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée $\vec{F}$ sur la surface de contact *S*.

c- **Le barycentre (*C*)** : C'est le centre de gravité de la surface immergée de la paroi.

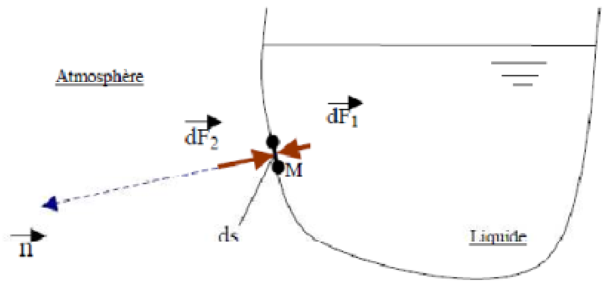
III.2.1 Force de pression élémentaire sur une paroi

Soit un élément de surface dS, centré sur le point M, à la profondeur z au-dessous de la surface libre d'un liquide (incompressible) et $\vec{n}$ la normale sortante de la paroi. On note P_0 la pression atmosphérique.

- Expression de la pression au point M

$$\Delta P = -\rho.g.\Delta Z \rightarrow P_M - P_A = \rho.g.(Z_A - Z_M)$$

$$P_A = P_0 \qquad \Rightarrow P_M = P_0 + \rho.g.Z$$



Expression de la résultante des forces de pression sur dS :

- Expression de la résultante des forces de pression sur *dS :*
  - bilan des forces appliquées sur dS :

    1)- force pression exercée par le liquide sur dS :

$$d\vec{F}_1 = P_M.d\vec{S} = (P_0 + \rho.g.z).d\vec{S} = (P_0 + \rho.g.z).dS.\vec{n}$$

    2)- force de pression exercée par l'extérieur sur dS :

$$d\vec{F}_2 = -P_0.d\vec{S} = -P_0.dS.\vec{n}$$

- résultante des forces de pression élémentaires exercées sur dS :

$$d\vec{F}_{paroi} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 \Rightarrow d\vec{F}_{paroi} = \rho.g.z.dS.\vec{n}$$

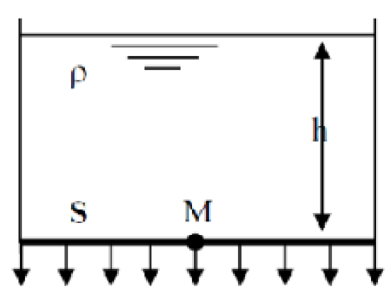
$$\Rightarrow \boxed{d\vec{F}_{paroi} = P.dS.\vec{n}} \text{ (uniquement l'action du liquide)}$$

La résultante des forces de pression ne tient compte que de l'action du liquide.

III.2.2 Forces de pression sur une plaque plane horizontale

Considérons un réservoir ouvert à l'air libre de sa surface supérieure, de surface de base *S.* contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ.

Sur une surface horizontale, la pression est uniforme sur toute la surface $\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho.g.h}$ alors :



$$F = \int P.dS \Rightarrow P = \int (\rho.g.h).dS$$

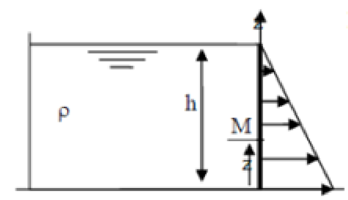
$$\Rightarrow P = \rho.g.h.\int dS$$

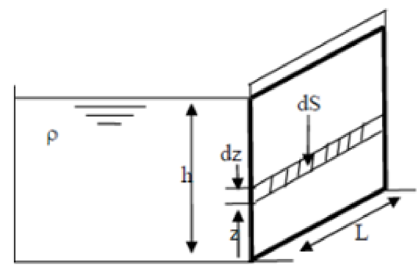
D'où : $\boldsymbol{P = \rho.g.h.s}$

Alors la force de pression appliquée sur une paroi horizontale, est égale au poids d'une colonne liquide verticale.

III.2.3 Forces de pression sur une plaque plane verticale

La force de pression en un point *M* quelconque de la surface verticale *S* d'épaisseur *L* est :





$$F = \int dF = \int P.dS$$

Où: $dF = \rho.g.z.dS$ et $dS = L.dz$

Alors : $F = \int_0^h \rho.g.z.L.dz \rightarrow F = \rho.g.L\int_0^h z.dz$

$\Longrightarrow F = \rho.g.L.\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h$

D'où: $F = \rho.g.L.\frac{h^2}{2}$ et $S = L.h$

Donc: $\boldsymbol{F = \rho.g.S.\frac{h}{2}}$

III.2.4 Forces de pression sur une plaque plane oblique

Soit une plaque de forme quelconque immergée et inclinée d'un angle α.

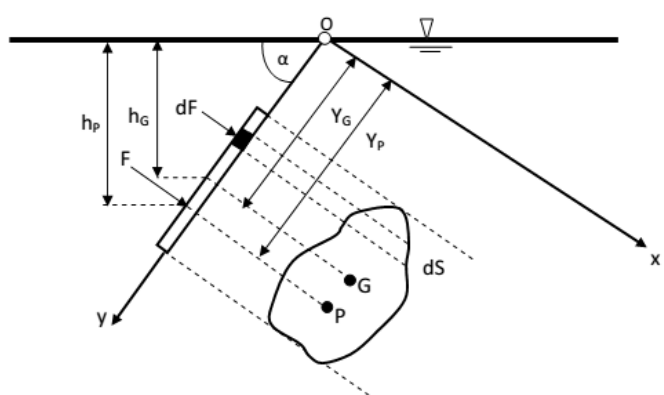


Figure 5 : Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe

Soit un élément de surface de la plaque « dS », la pression qui s'exerce sur cet élément est : $P = \rho\ g\ h$

La force de poussée exercée sur l'élément sera :

$$dF = P\ dS = \rho g h\ dS$$

Donc la force de poussée totale sur la plaque sera :

$$F = \int dF = \int \rho g h\ dS$$

Or, $h = y \sin\alpha$ d'ou:

$$F = \rho g\ \sin\alpha \int y\ dS$$

Le terme $\int y\ dS$ représente le moment statique de la surface par rapport à l'axe Ox :

$$\int y\ dS = y_G S$$

Avec y_G ordonnée du centre de gravité

L'expression de F devient :

$$F = \rho g\ \sin\alpha\ y_G S$$

et comme : $h_G = y_G \sin\alpha$

Donc l'expression finale de F devient :

$$\boldsymbol{F = \rho g\ h_G S}$$

h_G est la profondeur du centre de gravité de la surface

S est l'aire de la surface

III.2.5 Point d'application de la force résultante F (Centre de poussée)

Le point d'application de la force résultante F sur la surface de contact *S* est appelé : le centre de poussée.

Il se détermine par le calcul du moment de la force *F* par rapport à un point *O* quelconque.

La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires (ds) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$y_P F = \int y\, dF = \rho g \ \sin\alpha \int y^2\, dS$$

D'où :

$$y_P = \frac{\rho g \ \sin\alpha \int y^2\, dS}{\rho g \ \sin\alpha\, y_G S} = \frac{\int y^2\, dS}{y_G S}$$

Le terme $I_x = \int y^2\, dS$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe Ox.

Le théorème de Huygens nous permet d'écrire que:

$$I_x = I_{xG} + y_G^2 S$$

Où :

I_{xG} représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité

Dans ce cas, la formule de y_p devient :

$$y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

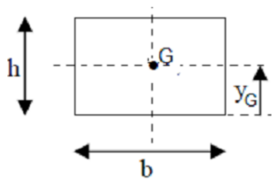
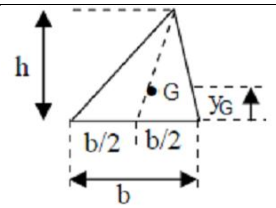
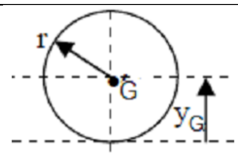
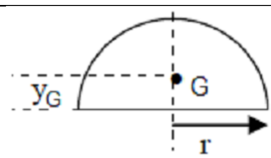
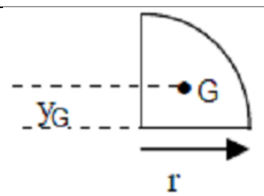
Cette formule montre que le point d'application de la résultante F se trouve toujours ***plus bas*** que le centre de gravité d'une distance égale à :

$$\frac{I_{xG}}{y_G S}$$

La profondeur du centre de poussée par rapport à la surface libre est donnée par:

$$\boldsymbol{h_p = y_p . Sin\alpha}$$

Le tableau suivant fournit le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surface plane.

Type de surface	Forme géométrique	Centre de gravité	surface	Moment d'inertie I_{xG}
Rectangle		$\frac{h}{2}$	$b.h$	$\frac{bh^3}{12}$
Triangle		$\frac{h}{3}$	$\frac{b.h}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
cercle		r	$\pi.r^2$	$\frac{\pi.r^4}{4}$
Demi cercle		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi.r^2}{2}$	$\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4$
Quart de cercle		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi.r^2}{4}$	$\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4$

Récapitulatif

En général, la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit :

$$F = \rho.g.d.S$$

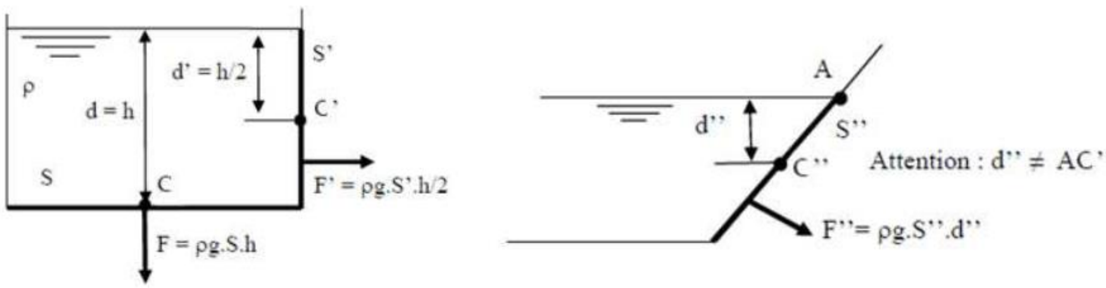
Avec :

S : Surface mouillée considérée (en contact avec le liquide).

d : distance entre le centre de gravité de S et la surface libre.

D : le point d'application de la résultante de la force de poussée F sur la surface de contact S :

- Pour une paroi horizontale : $d = h$
- Pour une paroi verticale : $d' = \frac{h}{2}$
- Pour une paroi inclinée : $d'' = y_c . sin\theta$



Donc, la force de pression sur une surface plane est égale au produit de la surface immergée par la pression qui subit son barycentre.

Exemple : Déterminer la poussée hydrostatique sur la paroi circulaire AB et son centre de poussée. On donne ρ=1000kg/m3 et g=9.81 m/s2

Solution :

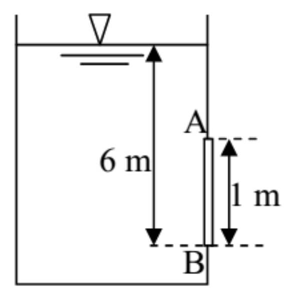
1. La force hydrostatique

$F = \rho g \; h_G S$

$F = 1000 \times 9.81 \times (6 - 0{,}5) \pi \; 0{,}5^2$

$\boldsymbol{F = 42,354 \; kN}$

2. Le centre de poussée



$$h_P = y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$y_G = h_G = 5.5 \; m \; et \; I_{xG} = \frac{\pi D^4}{64} = 0{,}049 \; m^4$ $\qquad h_P = 5{,}511 \; m$

III.2.6 Force de pression sur une surface courbe

Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de masse volumique ρ .

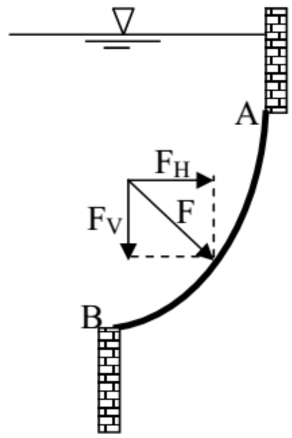


Figure : Surface solide courbe

La surface élémentaire **dS** est situé à une profondeur de **h** , la pression qui s'y exerce est : $P = \rho g h$

Donc la force élémentaire sera :$dF = \rho gh \, dS \Rightarrow F = \int \rho gh \, dS$

La dernière intégrale n'est pas possible dans tous les cas, car la force F change de direction sur la paroi, dans ce cas on évalue séparément les composants horizontale (F_H) et verticale (F_V) de la force F.

- La composante horizontale (F_H) s'écrit:

$$F_H = \int dF \ \sin\theta = \int \rho gh \ \sin\theta \, dS$$

On remarque que dS sin(θ) est la projection de la surface S sur un plan vertical.

Donc :

$$F_H = \rho g h_G S_x$$

Où :

S_x est la projection de la surface S sur un plan vertical ;

h_G est la profondeur du centre de gravite de la surface S_x.

- La composante verticale (F_V) est égale à :

$$F_V = \int dF \ \cos\theta = \int \rho gh \ \cos\theta \, dS$$

On remarque aussi que dS cos(θ) est la projection de la surface S sur un plan horizontal, d'où :$\int h\ \cos\theta\, dS = W$ est le volume du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre.

Donc :

$$F_V = \rho g W$$

Cette formule montre que la composante verticale F_v est le Poids du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre.

Le calcul des 2 composantes F_H et F_V permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante :

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Le centre de poussée est obtenu par l'intersection entre la surface courbée et la ligne d'action de la force résultante en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

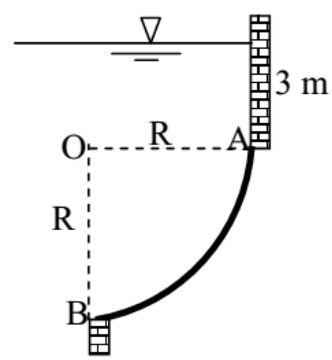
$$\theta = arctg\,\frac{F_V}{F_H}$$

Exemple :

Une vanne radiale est localisée à la base d'un mur vertical.

La largeur de la vanne est L = 5m et son rayon R = 4m.

Déterminer la force résultante exercée sur cette vanne



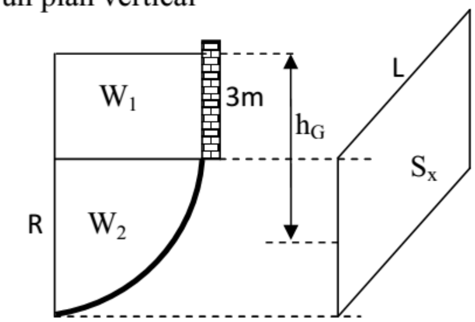
Solution

1. La force horizontale:

$F_H = \rho\ g\ h_G\ S_x = \rho\ g\ h_G\ R\ L$

Où S_x la projection de la surface courbée AB sur un plan vertical

donc :



$F_H = 1000\ 9{,}81\ 5\ 20$

$= 981$ kN

Le point d'application de F_H :

$$h_P = y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = h_G = 5\ m\ et\ I_{xG} = \frac{LR^3}{12} = 26{,}66\ m^4$$

$$h_P = 5{,}267\ m$$

2. La force vertical

$$F = \rho g\ W = \rho g\ (W_1 + W_2)$$

$$W_1 = 3\ R\ L\ et\ \ W_2 = \frac{\pi R^2}{4}\ L$$

$$F = 1000\ 9{,}81\ (12{,}56+12)\ 5$$

$$= 1204{,}67\ kN$$

Le point d'application de F_V est le centre de gravité du volume W :

$$x_G = \frac{x_{G1}S_1 + x_{G2}S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{R}{2}RL + \frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R^2}{4}}{RL + \frac{\pi R^2}{4}} = 1{,}85\ m$$