Probabilité conditionnelle et indépendance

0

Probabilité conditionnelle et indépendance

Quelques rappels !

🕮 Loi de probabilité

- ❑ **Expérience aléatoire :** toute expérience ayant plusieurs **issues** (ou **éventualités**) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
  - Ces éventualités sont notées e_1 ; e_1 ; . . . ; e_n.
  - Leur ensemble est l'**univers** noté Ω.
  - Donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; . . . ; e_n\}$.

Exemple :
On lance un dé à 6 faces.

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- ❑ Chaque éventualité e_i est affectée d'une **probabilité** , c'est-à-dire d'un nombre noté p_i
  tel que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \cdot \cdot \cdot + p_n = 1$

- ❑ On appelle **loi de probabilité** la donnée des p_i vérifiant ces conditions.

- ❑ Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dits qu'ils sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité p est **équiprobable** (ou ***équirépartie***).

1

Probabilité conditionnelle et indépendance

Exemple :

On lance un dé à 6 faces. Chaque face ayant les *mêmes chances* d'apparaître, chaque éventualité a une *probabilité* de 1/6. La loi de probabilité est donc :

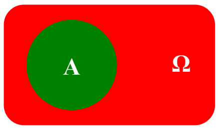
e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙

Remarque
De manière générale, si une expérience aléatoire est **équiprobable** et comporte **n issues différentes**, chacune des issues a une **probabilité** de **1/n**.

🕮 Vocabulaire des événements

Un **événement A** est une partie de l'univers **Ω** (on note A ⊂ **Ω**).

- **Ø** est l'événement impossible.
- **Ω** est l'événement certain.



Prenant l'exemple précédant ; l'événement :

A : « Obtenir un nombre pair »	A = {2 ; 4 ; 6}
B : « Obtenir un nombre ≤ 2 »	B = {1 ; 2}
B' : « Obtenir un nombre > 4 »	B' = {5 ; 6}
C : « Obtenir 7 »	C = Ø (événement impossible)
D : « Obtenir un nombre ≤ 6 »	D = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} = Ω (événement certain)

2

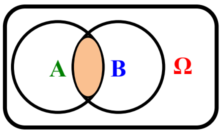
2

Probabilité conditionnelle et indépendance

❑ Soients **A** et **B** deux **événements** d'un **univers Ω** .

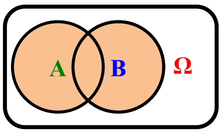
- L'événement **A∩B** est l'événement « **A et B**».

A∩B : « Obtenir un nombre pair **et** ≤ 2 » → A∩B = {2}



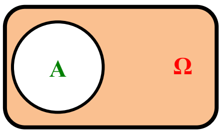
- L'événement **AUB** est l'événement « **A ou B** ».

AUB : « Obtenir un nombre pair **ou** un nombre ≤ 2 » → AUB = {1; 2 ; 4 ; 6}



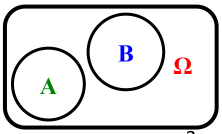
- L'événement **Ā** est l'événement « ***contraire*** *de* **A** » ou « **non A** ».

Ā : « Obtenir un nombre impair » → Ā = {1 ; 3 ; 5}



- Deux événements A et B sont ***incompatibles*** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si **A** ∩ **B** = Ø.

A : « Obtenir un nombre impair ≤ 3 »
B : « Obtenir un nombre pair ≤ 2 » → A ∩ B = Ø



3

3

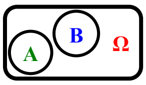
Probabilité conditionnelle et indépendance

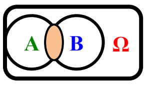
Probabilité d'un événement

- La **probabilité d'un événement** A est la **somme des probabilités** des **issues** qui le composent. On la note p(A). Ses propriétés :
  - $0 \leq p(A) \leq 1$: la probabilité d'un événement impossible est nulle, celle d'un événement certain est égale à 1 :

    $$p(\varnothing) = 0,\ p(\Omega) = 1.$$

  - *Additivité* : l'union de deux événements incompatibles, donc tels que $A \cap B = \varnothing$, a pour p la somme des p de ces évènements :

    $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$ ....lorsque ➔ 

    $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$ ....lorsque ➔ 

  - La somme des probabilités de deux événements complémentaires est égale à 1:
    $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ➔ $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

4

4

Probabilité conditionnelle et indépendance

- **Exemple : Prenant l'exemple précédant**

A : « Obtenir un nombre pair » — A = {2 ; 4 ; 6}

B : « Obtenir un nombre ≤ 2 » — B = {1 ; 2}

- $p(A) = 3/6 = 1/2$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 1/2 = 1/2$
- $p(B) = 2/6 = 1/3$
- $p(A \cap B) = 1/6$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$

Probabilité conditionnelle

- On appelle *probabilité conditionnelle* de l'événement **B** *par rapport* à l'événement **A**, ou encore, probabilité que **A** se réalise **sachant** que **B** se réalise, le nombre :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B) = P(B/A)\,P(A)$$

- **Théorème de la multiplication**

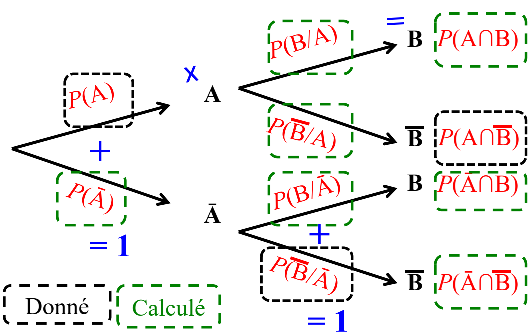
5

5

Probabilité conditionnelle et indépendance

❑ Diagramme en arbre

Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du résultat de l'expérience précédente ; il s'agit de *probabilités conditionnelles*. Pour représenter cette séquence, on utilise une représentation « **en arbre pondérée** », le *théorème* précédent permettant de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre.



$\otimes\ P(A)\times P(B/A)=P(A\cap B)$

$\otimes\ P(A)\times P(\bar{B}/A)=P(A\cap \bar{B})$

$\otimes\ P(A)\times P(\bar{A})=1$

$\otimes\ P(B/A)\times P(\bar{B}/A)=1$

$\otimes\ P(B/\bar{A})\times P(\bar{B}/\bar{A})=1$

6

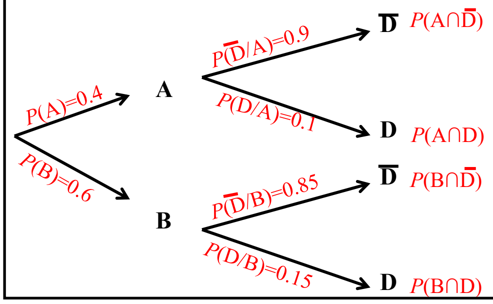
6

Probabilité conditionnelle et indépendance

🕮 Exemple :

Une usine fabrique des barquettes de steaks hachés sur deux l'ateliers. On admet que pendant un mois, l'atelier A a produit 40% des barquettes le reste est produit par atelier B. On admet que 10% des barquettes provenant de A sont défectueuses et que 15% provenant de B sont défectueuses.

1. Traduire les énoncés en arbre pondérée ?
2. Quelle est la probabilité dans un stocke de trouver une barquette provenant de l'atelier **A** *défectueuse* ; la probabilité de trouver une barquette provenant de B *non défectueuse* et la probabilité de trouver une barquette défectueuse.



$P(A\cap D)\ =\ P(D/A) \times P(A) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$

$P(B\cap \bar{D})\ =\ P(\bar{D}/B) \times P(B) = 0.6 \times 0.15 = 0.127$

(A∩D) et (B∩D) ➔ 2 événements *incompatibles* (**A** et **B** incompatible si **A∩B**=Ø) donc :

$P(A\cap D) \cup P(B\cap D) = P(A\cap D) + P(B\cap D)$
$= 0.04 + 0.09 = 0.13$

7

7

Variables aléatoires

Indépendance des évènements

- Deux événements sont indépendants, si la probabilité de l'un n'est pas modifiée lorsque l'autre est réalisé.
- ✧ **Attention !** : Ne pas confondre indépendants et disjoints (A et B sont disjoints si $P(A \cap B) = 0$, ou $A \cap B = \emptyset$)

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ &P(A / B) = P(A) \\ &P(B / A) = P(B) \end{aligned}}$$

Exemple 1:
Soit une famille de deux enfants. **A**= "*la famille a des enfants des 2 sexes*", **B** = "*la famille a, au plus, une fille* ». A et B sont-ils indépendants?

- Ω = {(F, F), (F, G), (G, F), (G, G)}
- A = {(F, G), (G, F)} ➔ P(A) = 2/4 = 1/2
- B = {(F, G), (G, F), (G, G)} ➔ P(B) = 3/4
- A∩B = A ➔ P(A∩B) = 1/2 ≠ ***P*(A) x *P*(B)**
- Donc A et B ne sont pas **indépendants**

Exemple 2: Même question avec 3 enfants.

- Ω = {(F, F, F), (F, F, G), (G, F, F), (F, G, F), (G, G, G), (G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)}
- A = {(F, F, G), (G, F, F), (F, G, F), (G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)} ➔ P(A) = 6/8 = 3/6
- B = {(G, G, G), (G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)} ➔ P(B) = 4/8 = 1/2
- A∩B = {(G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)}➔ P(A∩B) = 3/8 **= *P*(A) x *P*(B)**
- Donc A et B sont **indépendants**

8

8

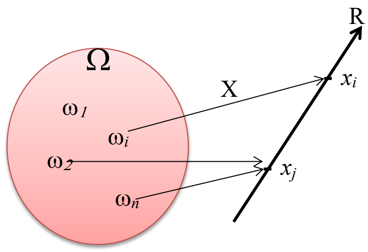
Variables aléatoires

Variable aléatoire

- **Définition** : Etant donné un **univers Ω**, une variable aléatoire est une application X de ω dans R :

$$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

- La valeur x correspond à la réalisation de la **variable X** pour l'**évènement** élémentaire ω (issue).



- X sert à caractériser le résultat de l'**expérience aléatoire**, et prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_j$.

Un exemple

Soit la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'univers est constitué des évènements élémentaires suivant : **Ω** = {GG, GF, FG, FF}

- On peut considéré la **variable aléatoire** comme : X « nombres de fille dans la famille »
- Donc **X** prend les valeurs {0, 1, 2}
- L'**évènement** associé à X=1 est ω_1 = {GF, FG}
- Sa **probabilité** p(X=1) = 2/4 = 1/2.

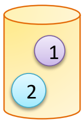
9

9

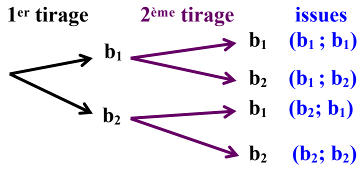
Variables aléatoires

❑ **Un autre exemple pour mieux comprendre**

Voici l'expérience aléatoire :



On tire une boule et on note son numéro
On la remet dans l'urne
On tire une 2ème boule et on note son numéro
On note la somme des deux numéros



- L'univers : **Ω** = {(b_1 ; b_1), (b_1 ; b_2), (b_2 ; b_1), (b_2 ; b_2)}
- **X** prend les valeurs {2, 3, 4}
- L'**évènement** associé à X=2 est ω_1 = {(b_1 ; b_1)}
- Sa **probabilité** p(X=2) = 1/4.

1) Comprendre une expérience aléatoire et définir l'univers **Ω**

2) Définir une variable aléatoire **X** sur **Ω**

3) Evènement associé à une variable aléatoire **X**

10

10

Variables aléatoires

❑ Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- On appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire *X*** la fonction qui, à chaque x_i , associe la probabilité de l'événement $p(X = x_i)$.
- On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

- On a : $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$

❑ Paramètres d'une variable aléatoire (Espérance, Variance et Écart-type)

- **Espérance mathématique de X :** $\boxed{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$
- **Variance de X :**

$$\boxed{V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2}$$

- **Écart-type de X :** $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

11

11

Variables aléatoires

❑ **Exemple :**

On lance trois pièces de monnaie équilibrées.

On gagne 1DA (+) chaque fois que F apparaît et on perd 1DA (−) chaque fois que P apparaît.

- **Ω** = {PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF}.
- **X** = {−3 ; −1 ; 1 ; 3}
- **Espérance :** $E(X)=\left[(-3)\times\frac{1}{8}\right]+\left[(-1)\times\frac{3}{8}\right]+\left[1\times\frac{3}{8}\right]+\left[3\times\frac{1}{8}\right]=0$
- **Variance :** $V(X)=\left[\frac{1}{8}(-3-0)^2\right]+\left[\frac{3}{8}(-1-0)^2\right]+\left[\frac{3}{8}(1-0)^2\right]+\left[\frac{1}{8}(3-0)^2\right]=\frac{5}{2}$
- **Écart-type de X :** $\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{2}}=1.58$

12

12

Variables aléatoires

🕮 Deux types de variables aléatoires

Discrètes

Ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle

Exemple :

X = « face du dé »

x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 (dénombrables)

Continues

Peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné

Exemple :

X = « poids d'un nouveau-né »

x = prend des valeurs 1 à 6kg

❑ **Loi de probabilité**

- Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des **valeurs** qu'elle peut prendre et par l'**expression mathématique** de la *probabilité* de ces valeurs.
- Cette expression s'appelle la **loi de probabilité (**ou ***distribution de probabilité***) de la variable aléatoire.
- La loi de probabilité est déterminée par les probabilités p_i des évènements $\{X = x_i\}$.

13

13

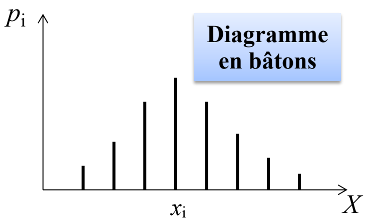
Variables aléatoires

❑ **Loi de probabilité**

Discrètes

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$x_i \in E\,,\ P(X{=}x_i) = p_i$



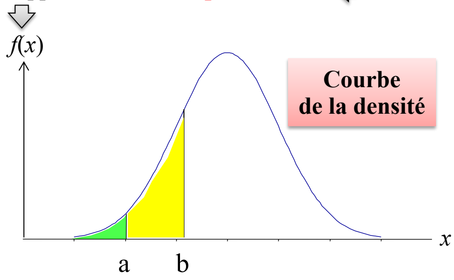
La loi de X est présentée dans un **tableau** ; contrairement à la loi de probabilité continue ou elle est donnée par la **fonction *f***

Continues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$\forall x \in E\,,\ P(X{=}x) = \mathbf{0}$ mais ! $\boldsymbol{P(X \in [x, x{+}dx[)} \neq 0$ $= f(x)dx$

Appelée **densité de probabilité**



$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

14

14

Variables aléatoires

❑ **Fonction F de répartition de la loi de X**

- **Définition :**

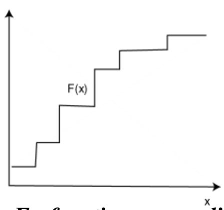
$$\left.\begin{array}{l} F : R \to [0,1] \\ x \to P(X \leq x) \end{array}\right\rangle F(x) = P(X \leq x)$$

- **Propriétés :**

F est croissante et continue à droite

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1\,;\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Discrètes



F* : *fonction en escalier

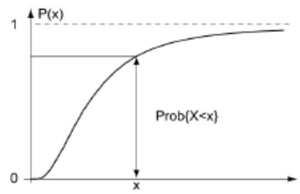
$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i}^{k} p_i$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$\mathbf{0 \leq F(x) \leq 1}$$

Continues



F* : *fonction continue

$$F'(x) = f(x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F(x)\,dx$$

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} F(x)\,dx$$

15

15

Variables aléatoires

Discrètes — **Continues**

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

Variance

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 f(x)dx$$

Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

16

16

Variables aléatoires - Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli (discrète)

Epreuve de Bernoulli
Est une *expérience aléatoire* qui n'a que deux issues possibles, appelée :

- **S** : « **succès** » ➔ probabilité $p(S) = p$
- **Ś** : « **échec** » ➔ probabilité $p(Ś) = (1 - p)$.

Variable aléatoire de Bernoulli
Est une variable :
- **X** prend la valeur de 1 en cas de « **succès** »
- **X** prend la valeur de 0 en cas de « **échec** »

Loi de Bernoulli de paramètre *p*
Loi de probabilité est présenté :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	$\boxed{p}$	$1 - p$

Est la probabilité du « **succès** »

Exemple

Si on lance un dé comme *expérience aléatoire* :
- **S** : obtenir un nombre ≥ 5 « **succès** »
- **Ś** : obtenir un nombre < 5 « **échec** »

Définir la variable aléatoire de Bernoulli :
- **X** prend la valeur de 1 en cas de « **succès** »
- **X** prend la valeur de 0 en cas de « **échec** »

- $P(X=1) = p(S) = 2/6 = 1/3$
- $P(X=0) = p(Ś) = 4/6 = 2/3$

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	1/3	2/3

Donc : X suit une Loi de Bernoulli de paramètre *p*=1/3

17

17

Variables aléatoires - Loi de Bernoulli

❑ Schéma de de Bernoulli de paramètre *n* et *p*

Si on a une **expérience aléatoire** qui consiste à répéter ***n* fois** de façon **identique** et **indépendante** une épreuve de **Bernoulli** (succès/Echec).

⇩

Schéma de Bernoulli de paramètre *n* et *p*
n : nombre de répétitions
p : la probabilité du succès de l'épreuve de Bernoulli

⇩

Si X : est le nombre de succès de un schéma de Bernoulli

⇩

Donc X : Suit une loi Binomiale de paramètre *n* et *p*
***B* (*n*, *p*)**

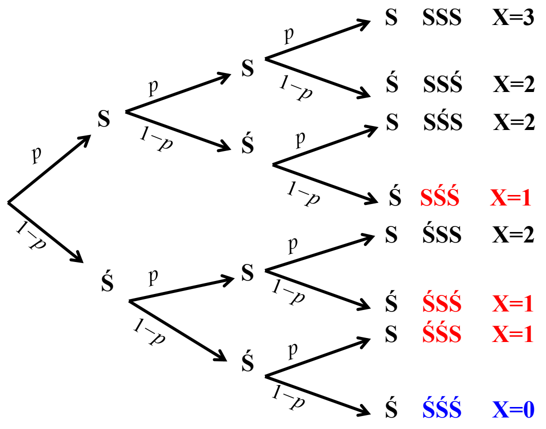
18

18

Variables aléatoires - Loi Binomiale

🕮 Loi Binomiale (loi discrète)

❑ **Exemple :**
Soit une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* répétée 3 fois de façon identique et indépendante



P(X=0)=*p*(ŚŚŚ)
= (*p*−1) x (*p*−1) x (*p*−1)
= $(p-1)^3$

P(X=1)= *p*(ŚŚS)+ *p*(ŚSŚ)+ *p*(SŚŚ)
= (*p*−1) x (*p*−1) x *p*
+ (*p*−1) x *p* x (*p*−1)
+ *p* x (*p*−1) x (*p*−1)
= $3[p \times (p-1)^2]$

P(X=2)= ?

⇨ **X : Suit une loi Binomiale de paramètre *p* et *n*=3**

19

19

Variables aléatoires - Loi Binomiale

Donc... La probabilité d'obtenir *k* succès au cours des *n* répétitions

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Ce lit *k* parmi *n* !

❑ **Triangle de Pascale :**

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2 +	1				
3	1	3	= 3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

20

20

Variables aléatoires - Loi Binomiale

❑ **Exemple :**

Prenant l'exemple précédant *p*(X=1)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 1) = \quad 3 \quad \times p^1 \times (1 - p)^{3-1}$$

	Loi de Bernoulli	**Loi Binomiale**
❑ **Espérance :**	$E(x) = p$	$E(x) = np$
❑ **Variance :**	$V(X) = p \times (1 - p)$	$V(X) = n \times p \times (1 - p)$
❑ **Ecart-type**	$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$	$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

21

21

Variables aléatoires

Exercice 1

On lance **10 fois** un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir **4 fois** le chiffre **1** au cours des dix lancers ?

Solution : L'expérience aléatoire est « Lancer le dé », avec :

- Succès « obtenir 1 » ➔ S
- Echec « obtenir 2, 3 4, 5, 6 » ➔ Ś
- **Ω** ={1, 2, 3 4, 5, 6}

✓ La probabilité d'avoir un succès : ***p*(S)= 1/6**
✓ Donc on a une **Loi de Bernoulli** de paramètre p=1/6

On répète 10 fois l'expérience de manière indépendante :

- X : Est le nombre de succès (nombre de fois où on obtient 1).

✓ Donc on a une **Loi de Binomiale** de paramètre n =10 et p = 1/6 ou ***B* (10, 1/6)**

$$P(X=k)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=4)=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-4} = 210 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.54$$

22

22

Variables aléatoires – Loi normale

Loi Normale (Variable continue)

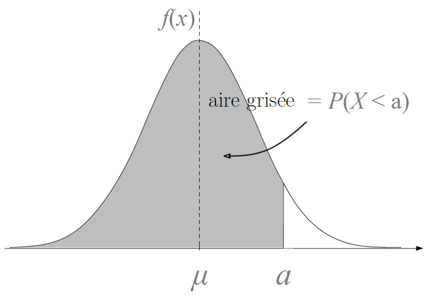
On parle de **loi normale** lorsque l'on à affaire à une **variable aléatoire continue** qui dépond d'un grand nombre de *causes indépendantes* dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante (**conditions de Borel**).

Cette variable aléatoire suit une loi normale de paramètre μ et σ notée $N(\mu\ ;\ \sigma)$, si sa **densité de probabilité** est données par :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2} \qquad E(x)=\mu \ \ et \ \ V(x)=\sigma^2$$

$$avec : \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

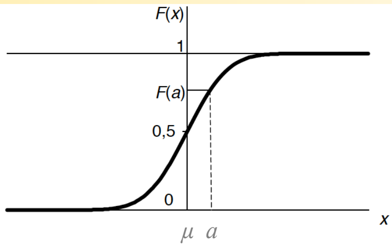
$$et \quad P(X<a)=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2}$$



23

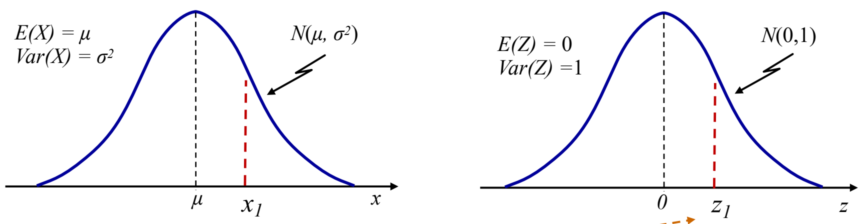
Variables aléatoires – Loi normale

Cette **intégrale** (celle de $f(x)$!) n'ayant pas d'expression mathématique simple, des **tables** donnent les valeurs de la **fonction de répartition** $F(x)$.



❑ Loi normale centrée réduite

- La variable **centrée réduite** associée à la variable aléatoire X est la variable : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
- La variable Z suit la loi normale $\mathbf{N(0\ ;\ 1)}$ dont les paramètres sont $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.



$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$$

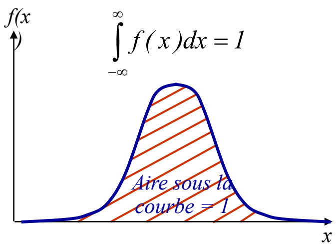
24

24

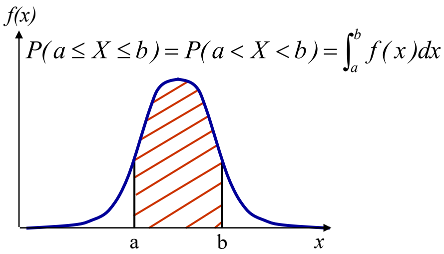
Variables aléatoires – Loi normale

❑ Propriétés

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



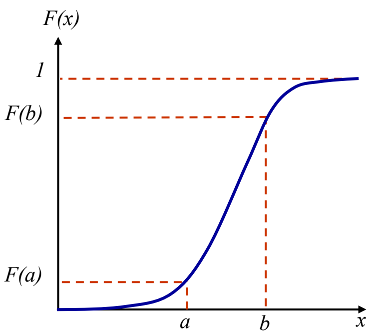
$$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Le calcul des probabilités se fait en calculant l'aire sous la courbe entre deux valeurs de X

et !

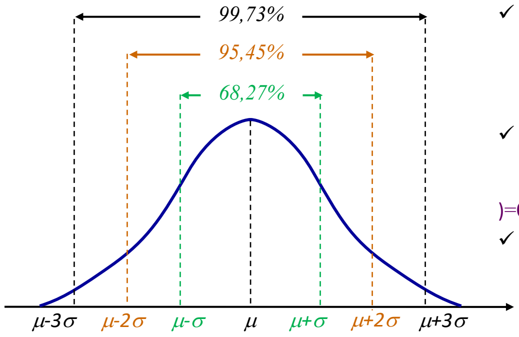
Peut aussi se faire à l'aide de la fonction de répartition



25

25

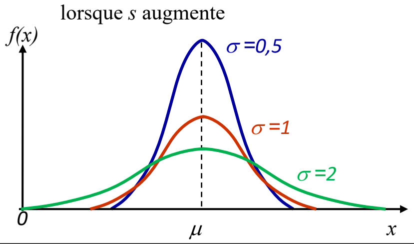
Variables aléatoires – Loi normale



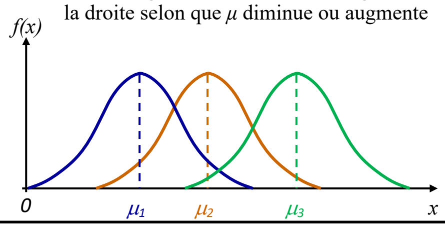
- ✓ *68,27%* des observations d'une loi normale se situent dans l'intervalle :
  $[\mu\text{-}1\sigma, \mu\text{+}1\sigma]$ ➔ $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 0.682$
- ✓ *95,45%* des observations se situent dans : $[\mu\text{-}2\sigma, \mu\text{+}2\sigma]$ ➔ $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = 0.954$

  95% plus utilisé : $P(\mu-1.96\sigma \leq X \leq \mu+1.96\sigma) = 0.95$
- ✓ *99,73%* des observations se situent dans : $[\mu\text{-}3\sigma, \mu\text{+}3\sigma]$ ➔ $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) = 0.997$

- ✓ Si μ ne change pas, la courbe s'aplatit lorsque *s* augmente



- ✓ *Si* σ ne change pas, la courbe se déplace sans changement de forme vers la gauche ou la droite selon que μ diminue ou augmente



26

Variables aléatoires – Loi normale

❑ Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite

Rappelez vous que l'**intégrale** de $f(x)$ n'est pas nécessaire pour le calcul des valeur de probabilité $P(X$ ou $Z)$, ces dernière peuvent être déterminées à partir de cette tables **tables.**

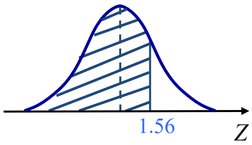
Pour $P(Z \leq 1{,}24)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

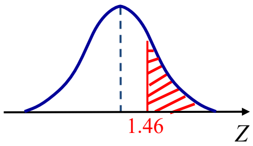
27

Variables aléatoires – Loi normale

❑ De la table : $P(Z \le 1.56) = 0.9406$

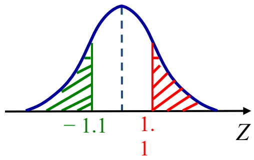


❑ De la table : $P(Z \ge 1.49) = 1 - P(Z \le 1.49)$
$= 1 - 0.9319 = 0.0681$

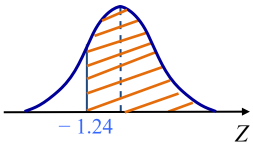


$P(Z \le -z) = P(Z \ge z)$

❑ De la table : $P(Z \le -1.1) = P(Z \ge 1.1)$
$= 1 - P(Z \le 1.1)$
$= 1 - 0.8643 = 0.1357$



❑ De la table : $P(Z \ge -1.24) = P(Z \le 1.24)$
$= 0.8925$

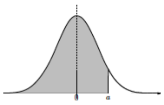
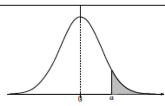
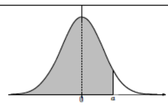
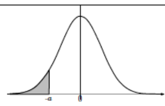
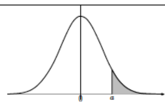
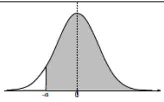
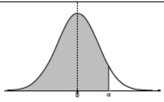


28

28

Variables aléatoires – Loi normale

❑ Pour résumer !

I	$\mathbb{P}(X \le a)$				$\Rightarrow$ table
II	$\mathbb{P}(X \ge a)$		$= 1 -$		$\Rightarrow$ cas I
III	$\mathbb{P}(X \le -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas II
IV	$\mathbb{P}(X \ge -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas I

29

29

Variables aléatoires – Loi normale

Pour faire des calculs avec une loi $N(\mu\ ;\ \sigma)$, on se ramène a la loi $N(0\ ;\ 1)$.
Donc on doit centrer et réduire X.

📖 **Exemple**

On suppose que la variable X suit $N\,(11;\,2)$. Quelle proportion d'individus est-ce que $X \leq 14$?

On centrer et réduire X

On va chercher : $P(X \leq 14) \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{14-11}{2}\right) \Leftrightarrow P(Z \leq 1.5)$

De la table : $P(Z \leq 1.5) =$ 0.9332

Donc : $P(X \leq 14) =$ 0.9332

Pour 93.3 % des individus, la variable X est inferieure à 14.

30

30

Variables aléatoires – Loi normale

❑ **Pour faire le calcul inverse, il existe la table des quantiles**

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	-∞	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	-1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	-1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	-1.476	-1.468	-1.461	-1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	-1.379	-1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	-1.305	-1.299	-1.293	-1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

Pour $P(Z \leq z) = 0{,}094 \rightarrow z = -1316$

31

31

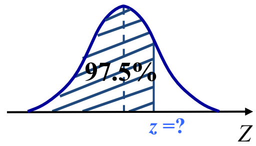
Variables aléatoires – Loi normale

❑ **Déterminer z pour une probabilité donnée ou chercher le quantile pour une probabilité donnée**

📖 **Exemple 1**

- Cherche le quantile à 97.5% pour la $N(0\ ;\ 1)$.

➔ Cela revient à déterminer z tel que $P(Z \le z) = 0.975$



❑ De la table **z** pour $P(Z \le z) = 0.975$ est **1.96**

Notation

Le quantile d'ordre α pour la loi normale centrée/réduite est note z_α (Ex : $z_{0.975} = 1.96$)

Pour revenir aux valeurs de la loi normale quelconque $N(\mu\ ;\ \sigma)$ ➔ On « déréduit » et on « décentre » le quantile de la loi normale $N(0\ ;\ 1)$ ➔ $X_\alpha = \mu + z_\alpha \times \sigma$

📖 **Exemple 2**

Revenant à l'exemple précédant : Le quantile X_α pour la loi normale de moyenne $\mu = 12$ et écart-type $\sigma = 1.2$ ➔ $X_\alpha = 12 + 1.96 \times 1.2 = 14.35$

32

32

Variables aléatoires – Loi normale

❑ **Exercice**

La note finale des étudiants de la promotion microbiologie/QPSA/NSA en statistique suit une loi normale de moyenne $\mu = 14.4$ et écart-type $\sigma = 2$

1) Déterminer la probabilité qu'un étudiant obtienne une note supérieure à 17 ?
2) Déterminer la proportion des étudiants ayant une note inferieur à 10 ?
3) Quel est le quantile a 90% des étudiants ?

❑ **Solution**

X la variable aléatoire associée aux notes des étudiants et ***Z*** est la variable centrée réduite.

1) On va chercher : $P(X \ge 17) \Leftrightarrow P\left(Z \ge \frac{17-14.4}{2}\right) \Leftrightarrow P(Z \ge 1.3)$ ← Centrer et réduire X

De la table : $P(Z \ge 1.3) = 1 - P(Z \le 1.3) = 1 - 0.9032 = \mathbf{0.0968}$

2) On va chercher : $P(X \le 10) \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{10-14.4}{2}\right) \Leftrightarrow P(Z \le -2.2)$

De la table : $P(Z \le -2.2) = P(Z \ge 2.2) = 1 - P(Z \le 2.2) = 1 - 0.9861 = \mathbf{0.0139}$

Donc on a 1.39% des étudiants ayant une note inferieur à 10.

3) On va chercher z_α :

De la table : $z_{0.90} = \mathbf{1.282}$

On déréduit et on décentre : $X_{0.90} = 14.4 + 1.282 \times 2 = 16.964$

33

33