وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة ـ

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

المحاضرة الثالثة – المصفوفات -

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2023 / 2024

الفصل الثالث

المصفوفات

1- المصفوفات:

1-1) تعاريف :

- ليكن IK حقلا ولتكن العناصر $a_{ij} \in \mathrm{IK}, \; i=1{:}m \;\; ,j=1{:}n$

تعرف المصفوفة بأنها مجموعة مربعة أو مستطيلة من الأعداد منتظمة بشكل سطور و أعمدة.

$$\mathrm{A_{ij}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \cdots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \cdots & \mathrm{a_{2n}} \\ \mathrm{a_{31}} & \mathrm{a_{32}} & \cdots & \mathrm{a_{3n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a_{m1}} & \mathrm{a_{m2}} & \cdots & \mathrm{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{i} = \text{سطر} \;, \qquad \mathbf{j} = \text{عمود}}$$

إذن الشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة ذات m سطر و n عمود ونقول

أيضا أنها مصفوفة من النوع (m,n) ونرمز بـ : $A \in IK^{m.n}$

حيث السطر الأول هو: $(a_{11}\; a_{12}\; a_{13} \;\; \ldots a_{1n}\,)$

والعمود الأول هو: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

كما نرمز للمصفوفة بـ :

$A = (a_{ij})\; i = 1{:}m\,, \quad j = 1{:}\mathrm{n}$ مع a_{ij} هو العنصر الذي يقع في السطر i والعمود j .

و بصفة عامة نكتب : $A \in M_{m,n}\,(IK)$

- نقول أن المصفوفتين $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ متساويتان إذا كان :

$$\forall i=1:m, \forall j=1:\mathrm{n}: a_{\mathrm{ij}}=\mathrm{b}_{\mathrm{ij}}$$

- نقول أن المصفوفة $A=(a_{ij})$ معدومة اذا كان : $\forall i,j: \quad a_{\mathrm{ij}}=0$

- نقول أن المصفوفة $A=(a_{ij})$ مربعة اذا كان : n=m

- نقول عن المصفوفة $A=(a_{ij})$ المربعة أنها :

* مثلثية سفلى إذا كان : $\forall j>i: \quad a_{\mathrm{ij}}=0$

* مثلثية علوية إذا كان : $\forall j<i: \quad a_{\mathrm{ij}}=0$

*قطرية إذا كان : $\forall j\neq i \quad : \quad a_{\mathrm{ij}}=0$

- المصفوفة الحيادية هي مصفوفة قطرية بحيث كل عناصر القطر تساوي 1 ونرمز لها ب:

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- منقول المصفوفة $A=(a_{ij})$ هي المصفوفة المرموز لها ب A^{t} والمعرفة ب $A^{\mathrm{t}}=(a_{ji})$

مثال-1- :

منقول المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $A^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

- نقول أن المصفوفة المربعة $\mathrm{A}=(a_{ij})$ تناظرية اذا كان : $A=A^{\mathrm{t}}$.

وضد التناظرية إذا كان : $A=-A^{\mathrm{t}}$.

1-2- عمليات على المصفوفات :

- الجمع :

جمع المصفوفتين $A=(a_{ij})_{m,n}$ و $B=(b_{ij})_{m,n}$ هي المصفوفة c المعرفة بـ :

$$c=A+B \quad \text{حيث} \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال-2- : $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

- جداء مصفوفة بعدد:

جداء المصفوفة $A=(a_{ij})_{m,n}$ بالعدد الحقيقي λ هي المصفوفة المعرفة بـ :

$$\lambda.A=(\lambda.a_{ij})_{m,n}$$

مثال-3- : $2.\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 6 & 8 & 4\\ 2 & 6 & 2\end{pmatrix}$

- جداء مصفوفتين :

جداء مصفوفتين $A=(a_{ij})_{m,n}$ ، $B=(b_{ij})_{n,p}$ هي المصفوفة $C=(c_{ij})_{m,p}$ المعرفة بـ :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

مثال-4- :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}$$

ملاحظة: عموما لدينا : $A.B\neq B.A$

مثلا: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A.B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\\1&4\end{pmatrix}$$ لكن في هذه الحالة الجداء $B.A$ غير معرف

<u>خواص</u> :

$$(A+B)^t=A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}=B^{\mathrm{t}}+A^{\mathrm{t}}\ ,\qquad (\lambda.\mathrm{A})^{\mathrm{t}}=\lambda.A^{\mathrm{t}}\ \forall\lambda\in \mathrm{IR}\ ,$$

$$(\mathrm{A.B}).\mathrm{C}=\mathrm{A}.(\mathrm{B.C})$$

$$(A.B)^t=B^{\mathrm{t}}.A^{\mathrm{t}},\quad A.(B+C)=A.B+A.C\quad ,\quad (B+C).A=B.A+C.A$$

<u>مثال-5-</u> :

لتكن المصفوفتين : $$B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

أحسب $(A+B)^t$, $A+B$, $B.A$, $A^{\mathrm{t}},A.B$ وهل المصفوفة A هي تناظرية

لدينا : المصفوفة A ليست تناظرية لأن $A^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{pmatrix}\neq A$

$$A.B=0\qquad (si\quad A.B=0\quad \nRightarrow A=0\vee\ \ B=0)$$

حالة خاصة فقط $B.A=0\ (A.B=0=B.A)$

3-1- <u>مرتبة المصفوفة</u> :

لتكن المصفوفة $A\ \in M_{m,n}$ نسمي مرتبة المصفوفة ونرمز لها بـ $rg(A)$ عدد أعمدة أو أسطر المصفوفة A المستقلة خطيا

<u>طريقة عملية</u> :

لإيجاد مرتبة المصفوفة A نحولها إلى مصفوفة مثلثيه سفلى أو علوية ويكون عدد الأعمدة أو عدد الأسطر الغير معدومة هو $rg(A)$

مثال-6- :

أوجد مرتبتي المصفوفتين A وB:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-(3)]{\substack{(2)-(1)\\(3)-2.(1)}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)+(2)]{(3)+(2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 8 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}.(2)]{(2)-\frac{1}{2}.(1)}\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 7 & -\frac{3}{2}\\ 0 & -3 & \frac{11}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)+\frac{3}{7}.(2)}\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 7 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & \frac{34}{7}\end{pmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

2-1-3 مقلوب مصفوفة مربعة :

نقول عن مصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة نرمز لها بـ A^{-1} بحيث :

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$$

مثال-7- :

أوجد مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

نضع: $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ومنه لدينا :

$$\mathrm{A.A^{-1}=I}\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=1, b=-1, c=0, d=1$$

ومنه : $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

لتكن المصفوفتين A و B القابلتين للقلب , لدينا الخواص التالية :

$$(A^{-1})^t=(A^{\mathrm{t}})^{-1}\quad ,(\mathrm{A}^{-1})^{-1}=\mathrm{A}\quad ,(\mathrm{A.B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1}\ ,\qquad \mathrm{I}^{-1}=I$$

نقول أن المصفوفة A أنها مصفوفة عمودية إذا كان: $A^t = A^{-1}$.

1-5- طريقة غوص جور دان لحساب مقلوب مصفوفة:

وتعتمد على تحويل الشكل A/I إلى الشكل $\mathrm{I}/\mathrm{A}^{-1}$ من خلال استعمال العناصر المحورية .

مثال-8-:

أحسب مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $A/I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = I/A^{-1}$$

ومنه المصفوفة المقلوبة أو العكسية هي : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

مثال -9-:

مقلوب $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ لدينا :

$$A/I = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-\frac{(1).\frac{1}{4_1}}{2}.(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2).2^{(1)-\frac{1}{2}.(2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \mathrm{I}/\mathrm{A}^{-1}$$

ومنه المصفوفة المقلوبة أو العكسية هي : $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$