وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

المحاضرة الخامسة – جمل المعادلات الخطية -

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2023 / 2024

الفصل الخامس

جمل المعادلات الخطية

من بين أهم تطبيقات المحددات هو حل جملة المعادلات الخطية من الشكل **A.X=b** حيث **A** مصفوفة من النمط ***(m،n)*** قابلة للقلب و **b** شعاع من $\mathbb{R}^m$ و **X** شعاع مجهول من $\boldsymbol{R^m}$.

طريقة كرامر:

تعطى مركبات الشعاع **X** بالعبارة التالية: $\boldsymbol{x_i} = \frac{|A_i|}{|A|}$ حيث $\boldsymbol{A_\mathrm{i}}$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b.**

مثال-1- :

أوجد حلول جملة المعادلات

$$\begin{cases} 5x - 6y \ = \ \ \ 15 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$$

الحل:

1- نقوم بحساب المحدد :

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-6) = 20 + 18 = 38$$

2- نحسب $\det(A_1)$:

نعوض عن العمود x في المحدد بالشعاع $(15\ ,\ \text{-}29)^{\perp}$

$$\det(\mathrm{A}_1) = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix} = 15(4) - (-29)(-6) = -114$$

$$x = \frac{-114}{38} = -3$$

3- نحسب $\det(A_2)$:

نعوض عن العمود y في المحدد بالشعاع $(15\ ,\ \text{-}29)^{\perp}$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix} = 5(-29) - 3(15) = -190$$

$$y = \frac{-190}{38} = -5$$

مثال-2- :

أوجد حلول جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

الحل:

1- نحسب $\det(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [(1 \times 5 \times -1) + (2 \times 3 \times 2) + (1 \times 3 \times 7)] - [(2 \times 5 \times 1) + (7 \times 3 \times 1) + (-1 \times 3 \times 2)] = 3$$

2- نحسب $|A_1|$:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -87$$

$$x = \frac{-87}{3} = -29$$

3- نحسب $|A_2|$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$y = \frac{33}{3} = 11$$

4- نحسب $|A_3|$:

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}=33$$

$$z=\frac{33}{3}=11$$

مثال-3-: حل الجملة الخطية **A.X=b** حيث: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 8\\ 1 & 3 & 11\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$,

$$b=\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 21\end{pmatrix}$$

لدينا الجملة **A.X= b** تملك حلا وحيد لأن $|\boldsymbol{A}|=\mathbf{6}\neq\mathbf{0}$ اذن :

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\ 15 & 3 & 8\\ 21 & 3 & 11\end{vmatrix}}{6}=\frac{12}{6}=2 \qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & 15 & 8\\ 1 & 21 & 11\end{vmatrix}}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 15\\ 1 & 3 & 21\end{vmatrix}}{6}=\frac{12}{6}=2$$

ومنه حل الجملة هو: $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$

طريقة استعمال المقلوب:

نقوم بحساب مقلوب المصفوفة A فيعطى الحل بالشكل التالي: $X=A^{-1}.b$

مثال-4-: حل الجملة التالية: $\begin{cases}x_1+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=2\\ x_2+x_3=3\end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \quad , \quad b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ فنجد: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ومنه حل الجملة هو:

$$X=A^{-1}.b=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

طريقة غوص:

تعتمد هذه الطريقة على تحويل الشكل **A.b** إلى الشكل **T.b** حيث **T** هي مصفوفة مثلثيه سفلية أو علوية.

مثال-5-: حل الجملة الخطية السابقة:

$$A/b=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{(3)-(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}1.x_3=2\\ 1.x_2=1\\ 1.x_1+1.x_3=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$