

2 الفصل الثاني: تطبيقات المعادلات التفاضلية

2.1 طرق حلول المعادلات التفاضلية الخطية

2.1.1 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بدون طرف

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بدون طرف يمكن تقديمها باستخدام المعادلة التالية:

$$(6.1) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

حيث $P(x)$ هي دالة معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام المعامل التكامل التآلي التالي: $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$(7.1) \quad y(x) = C e^{-\int P(x) dx}$$

حيث C هو ثابت التكامل.

2.1.2 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بطرف

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بطرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$(8.1) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام العامل التكامل التآلي التالي: $e^{\int P(x) dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$(9.1) \quad y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(\int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C \right)$$

حيث C هو ثابت التكامل.

2.1.3 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بدون طرف (متجانسة)

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 2 بدون طرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$(10.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام للمعادلة (10.1)، يمكن استخدام العامل التكامل التآلي التالي: $e^{\int P(x) dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$(11.1) \quad y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(\int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C_1 \right) + C_2$$

حيث C_1 و C_2 هما ثوابت التكامل.

2.1.4 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات متغيرة

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$(12.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام العامل التكامل التآلي التالي: $e^{\int P(x) dx}$
لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$(13.1) \quad y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(\int e^{\int P(x) dx} \left(Q(x)e^{\int P(x) dx} + R(x) \right) dx + C_1 \right) + C_2$$

حيث C_1 و C_2 هما ثوابت التكامل.

2.1.5 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

حلول المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$(14.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

حيث a و b هي معاملات ثابتة و $f(x)$ دالة معروفة.

❖ لحساب الحل العام $y_g = y_p + y_h$ للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (14.1)، يجب حساب الحل الخاص y_p

والحل المتجانس y_h ، للمعادلة التفاضلية المتجانسة (15.1) التالية:

$$(15.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة (15.1) يمكن استخدام العامل التكامل e^{rx} للحصول على المعادلة الجبرية التالية:

$$(16.1) \quad r^2 + ar + b = 0$$

• حالة وجود جذرين حقيقيين مختلفين:

$$(17.1) \quad y_h(x) = e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)x} c_1 + e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)x} c_2$$

• حالة وجود جذرين حقيقيين متطابقين (جذر مضاعف):

$$(18.1) \quad y_h(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 + c_2 x)$$

• حالة وجود جذرين مركبين مترافقين:

$$(19.1) \quad y_h(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} x \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} x \right) \right)$$

المعادلة	الحل الخاص: y_p	الظواهر العلمية
$\frac{dy}{dx} - by = x^n$	$\frac{n!}{(b)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} x^k$	تسخين أو تبريد مادة ما
$\frac{dy}{dx} - by = e^{ax}$	$\frac{e^{ax}}{a - b}$	النمو الشعاعي أو الانحسار
$\frac{dy}{dx} - by = \sin(\beta x)$	$-\frac{\beta (\cos(\beta x)) + b (\sin(\beta x))}{b^2 + \beta^2}$	حركة متذبذبة، مثل النبضات الصوتية أو الضوئية
$\frac{dy}{dx} - by = e^{ax} \sin(\beta x)$	$\frac{(\alpha - b) \sin(\beta x) - \beta (\cos(\beta x))}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} e^{ax}$	ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو
$\frac{dy}{dx} - by = \cos(\beta x)$	$\frac{\beta (\sin(\beta x)) - b (\cos(\beta x))}{b^2 + \beta^2}$	حركة متذبذبة، مثل النبضات الصوتية أو الضوئية
$\frac{dy}{dx} - by = e^{ax} \cos(\beta x)$	$\frac{(\alpha - b) (\cos(\beta x)) + \beta \sin(\beta x)}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} e^{ax}$	ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = x^n$	$\sum_{k=0}^n a_k x^k$	تسخين أو تبريد مادة ما مع تأثير الطاقة الحركية
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = e^{ax}$	$\frac{e^{ax}}{\alpha^2 + a\alpha + b}$	ظواهر تتضمن تسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل الطاقة الحركية
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = \sin(\beta x)$	$\frac{(b - \beta^2) (\sin(\beta x)) - (a\beta) (\cos(\beta x))}{(b - \beta^2)^2 + a^2 \beta^2}$	ظواهر متذبذبة مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = e^{ax} \sin(\beta x)$	$\frac{(b + \alpha^2 - \beta^2 + a\alpha) (\sin(\beta x)) - \beta (a + 2\alpha) (\cos(\beta x))}{(b + \alpha^2 - \beta^2 + a\alpha)^2 + \beta^2 (a + 2\alpha)^2} e^{ax}$	ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = \cos(\beta x)$	$\frac{(b - \beta^2) (\cos(\beta x)) + a\beta (\sin(\beta x))}{(b - \beta^2)^2 + a^2 \beta^2}$	ظواهر متذبذبة مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = e^{ax} \cos(\beta x)$	$\frac{(b + \alpha^2 - \beta^2 + a\alpha) (\cos(\beta x)) + \beta (a + 2\alpha) (\sin(\beta x))}{(b + \alpha^2 - \beta^2 + a\alpha)^2 + \beta^2 (a + 2\alpha)^2} e^{ax}$	ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي
	$\int e^{ax} \sin(\beta x) dx = \frac{e^{ax}}{\alpha^2 + \beta^2} (a \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x)) + c$ $\int e^{ax} \cos(\beta x) dx = \frac{e^{ax}}{\alpha^2 + \beta^2} (a \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)) + c$	

نوع المعادلة التفاضلية	صيغة المعادلة	الحل	الظواهر العلمية
من الرتبة الأولى بدون طرف	$\frac{dy}{dx} - f(x) = 0$	$y(x) = \int f(x) dx$	تفاعلات كيميائية بسيطة
من الرتبة الأولى بطرف	$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$	استخدام طرق التكامل العددي	حركة الجسم الذي يتأثر بقوة معينة
خطية من الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$	$y = \mu(x) \int \frac{q(x)}{\mu(x)} dx + C$ $\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)q(x)$	حركة الجسم ، عمليات الاضمحلال، الدوائر الكهربائية
منفصلة المتغيرات	$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$	$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$	نمو السكان، مسائل الخلط
من الرتبة الثانية بدون طرف	$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$	استخدام طرق التكامل والتحليل الجبري	حركة المواد في السوائل والغازات
من الرتبة الثانية بطرف	$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$	تطبيق أساليب التحليل الجبري المتقدمة	الاهتزازات الميكانيكية
من الرتبة الثانية بطرف، ذات معاملات ثابتة	$y'' + ay' + by = c$	$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + \frac{c}{b}, \Delta = a^2 - 4b > 0$ $y = (A + Bt)e^{rt} + \frac{c}{b}, \Delta = 0$ $y = e^{pt} (A \cos(qt) + B \sin(qt)) + \frac{c}{b}, \Delta < 0$	التحليل الاهتزازي الحركة التوافقية البسيطة الديناميكا الحرارية
معادلة تفاضلية غير خطية	$y'' + f(y') + g(y) = 0$	حل تحليلي غير ممكن، يتطلب طرق عددية	الظواهر المتقطعة الديناميكا الكمية

2.2 تطبيقات المعادلات التفاضلية في الظواهر الديناميكية

2.2.1 الديناميكا السكانية الإيكولوجية (علم البيئة)

تُستخدم المعادلات التفاضلية لوصف تغير عدد السكان في مجموعات بيولوجية مثل الفراشات أو السمك أو الطيور عبر الزمن، مما يسمح بتحليل تفاعلات الكائنات الحية مع بيئتها وتأثيرها على توزيعها وتنوعها البيولوجي وتوقع تطورها.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dN}{dt} = rN$	معادلة النمو الأساسي (نمو سكاني بدون قيود)
$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$	معادلة النمو اللوجستي (نمو سكاني مع قدرة استيعابية، المنافسة البسيطة بين السكان)
$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1}) - \beta N_1 N_2$	معادلة التفاعل بين مجتمعين مختلفين
$\frac{dN}{dt} = rN \log(\frac{K}{N})$	معادلة نمو السكان بنمو لوجاريثمي
$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right)^{\frac{3}{2}}$	معادلة نمو السكان مع الحسابات الديناميكية
$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)^n$	معادلة النمو اللوجستي العامة
$\frac{dN}{dt} = rN - aNP$	معادلة النمو مع التفاعل بين الفريسة والمفترس

2.2.2 الديناميكا الكيميائية

تُستخدم المعادلات التفاضلية لوصف سرعة التفاعلات الكيميائية وتغير تركيز المواد الكيميائية عبر الزمن، مما يساعد في فهم تفاعلات الكيمياء الحيوية والكيمياء الصناعية.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$	قانون التفاعل الأولي لتفاعل من الدرجة الأولى
$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$	قانون التفاعل الأولي لتفاعل من الدرجة الثانية
$\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$	تفاعل كيميائي بين مركبين
$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^m [B]^n$	تفاعل كيميائي متعدد المكونات
$\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_2[A]^2$	تفاعل معادل
$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^{\frac{1}{2}}$	تفاعل كيميائي معادل
$\frac{dO_3}{dt} = k_1 O_2 + k_2 O \cdot O_3$	معادلة تغير الأوزون
$\frac{dCO_2}{dt} = P - R$	معادلة تغير مستوى ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجوي

2.2.3 الديناميكا الفيزيائية

تُستخدم المعادلات التفاضلية في الفيزياء لوصف حركة الجسيمات والتغيرات في الطاقة والمتغيرات الفيزيائية الأخرى عبر الزمن.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dv}{dt} = a$	الحركة الانتقالية السريعة بثابت السرعة a
$\frac{dx}{dt} = v$	الحركة الانتقالية بسرعة ثابتة v
$\frac{d^2x}{dt^2} = a$	حركة متسارعة بمعدل ثابت a
$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$	حركة مرنة بمعدل ترددي ω
$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$	حركة كتلة ثابتة مع مقاومة الهواء
$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$	نظام اهتزازي بسيط (نواس معلق)

2.2.4 الديناميكا الاقتصادية

تُستخدم المعادلات التفاضلية في الاقتصاد لوصف تغيرات مؤشرات الاقتصاد مثل الإنتاج الوطني والإجمالي والتضخم والبطالة.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dS}{dt} = I - C$	معادلة التوفير والاستهلاك
$\frac{dI}{dt} = G - T$	معادلة الاستثمار والضرائب
$\frac{dY}{dt} = C + I + G + (X - M)$	معادلة الناتج الوطني
$\frac{dL}{dt} = P - w$	معادلة العرض والطلب على العمل
$\frac{dP}{dt} = \alpha P$	معادلة التضخم
$\frac{dC}{dt} = \beta C$	معادلة التوفير

2.2.5 الديناميكا الحرارية (تغير طاقة وحركة الأجسام)

تستخدم المعادلات التفاضلية في دراسة توزيع درجة الحرارة وتغيراتها في الأجسام والأنظمة الحرارية.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{\Delta T}{d}$	معادلة انتقال الحرارة
$\frac{dS}{dt} = \frac{kA}{d} (T_H - T_C)$	معادلة زيادة الانحراف الانتروبي
$\frac{dU}{dt} = - \frac{kA}{d} (T_H - T_C)$	معادلة انخفاض الطاقة الداخلية

2.2.6 الديناميكا الكهربائية

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\sum V = 0$	قانون كيرشوف للدوائر الكهربائية
$V = I \times R$	قانون الفروق الجزيئية
$I = C \frac{dV}{dt}$	معادلة التوصيل الكهربائي للمكثفات
$V = L \frac{dI}{dt}$	معادلة التوصيل الكهربائي للملفات
$\frac{dQ}{dt} = I$	علاقة التيار والشحنة
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	قانون الفلكس للتيار الكهربائي
$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	قانون فاراداي للتوليد المغناطيسي بالحقل الكهربائي

2.2.7 الديناميكا الحيوية

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$	معادلة نمو الأورام
$\frac{dN}{dt} = rN$	معادلة نمو السكان
$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$	معادلة تنظيم السكان
$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (k \cdot \ln(\frac{N}{N_0}))$	معادلة زيادة الانحراف الانتروبي
$\frac{dH}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	معادلة حرارة الانتقال
$\frac{dE}{dt} = \text{Food Intake} - \text{Metabolism}$	معادلة التوازن الحراري

2.3 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

2.3.1 الظواهر العلمية الخاضعة للنمو الأسّي أو التضاؤل الأسّي

(20.1)

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

- $P(t)$ هي قيمة الدالة في وقت t .
 - P_0 هي القيمة الابتدائية للدالة عند $t = 0$.
 - e هو أساس اللوغاريتم الطبيعي (تقريباً 2.71828).
 - k هو ثابت معدل النمو/التحلل.
- بحيث:

- إذا كان $k > 0$ ، فإن الحل يمثل نموًا أسّيًا.
- إذا كان $k < 0$ ، فإن الحل يمثل تحللًا أسّيًا.
- إذا كان $k = 0$ ، فإن الدالة ثابتة: $P(t) = P_0$.

النمو الأسّي للعدد الحقيقي لسكان البشر لا يمكن الاستمرار فيه لأكثر من 10-20 عامًا بسبب استهلاك الموارد، تراكم النفايات، التنافس، وقيود المساحة فالنماذج النظرية التي تتجاهل مثل هذه الحدود تصبح غير واقعية.

الظاهرة العلمية	$P(t)$	k	P_0
نمو بكتيري	عدد البكتيريا	معدل نمو البكتيريا	عدد البكتيريا في البداية
نمو سكاني	عدد السكان	معدل النمو السكاني	عدد السكان في البداية
تفكك إشعاعي	عدد النظائر المشعة	ثابت التفكك	عدد النظائر المشعة في البداية
انتشار شائعة	عدد الأشخاص الذين يعرفون الشائعة	معدل انتشار الشائعة	عدد الأشخاص الذين يعرفون الشائعة في البداية
نمو خلية	حجم الخلية	معدل نمو الخلية	حجم الخلية في البداية

2.3.2 الظواهر العلمية الخاضعة للنموذج اللوجستي

نمو بشكل سريع في البداية، ثم يتباطأ معدل النمو تدريجيًا حتى يصل إلى سعة التحمل K

(21.1)

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

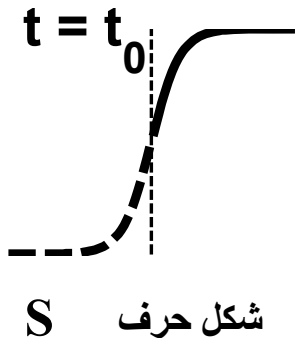
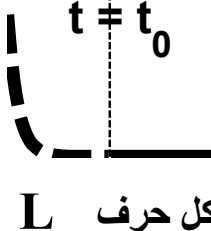
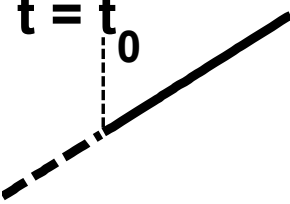
الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
نمو السكان	$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$
نمو البكتيريا	$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$
نمو الأورام	$\frac{dV}{dt} = rV \left(1 - \frac{V}{K} \right)$
انتشار التكنولوجيا	$\frac{d(\ln(A))}{dt} = k(1 - A)$
التعلم	$\frac{dL}{dt} = k(L_f - L)$

- dP/dt : هو معدل تغير عدد السكان P بالنسبة للزمن t .
- r : هو معدل النمو الأقصى.
- P : هو عدد السكان في الزمن t .
- K : هي السعة الاستيعابية للبيئة.

الظاهرة العلمية	المدة القصوى للنمو الأساسي بدون قيود	العوامل المحددة
اضمحلال البكتيريا	أيام 2-3	نفاد المواد الغذائية، تراكم النفايات
الحشرات / الآفات	أشهر 1-2	التنافس على مصادر الطعام
الحيوانات في بيئات جديدة	سنوات 5-10	قيود المساحة، الموارد الغذائية
النماذج الرياضية النظرية	غير محددة وغير واقعية	تجاهل الحدود الفيزيائية في العالم الحقيقي
انحسار نمو السكان البشري	من 1850 الى 1975 بنسبة اقل من 2 بالمائة في كل سنة	استهلاك الموارد، التنافس
تحلل النظائر المشعة	مليارات السنين	تناقص النوى المشعة
تفكك الجزيئات الكيميائية	ثواني إلى دقائق	درجات الحرارة، الحموضة، الإشعاع

■ مثال توضيحي:

العام	العدد التقريبي لسكان العالم بالمليار
1000	0.31
1500	0.5
1800	1.0
1850	1.26
1875	1.43
1900	1.63
1925	1.93
1950	2.52
1975	4.07
1985	4.85
1995	5.75
2000	6.12
2005	6.54
2015	7.35
2020	7.83
2050	9.73
2100	10.9

النمو ثم التضاؤل اللوجستي	النمو أو التضاؤل الأسّي	النمو أو التضاؤل الخطي	الخاصية
نمو سريع في البداية ثم يتباطأ تدريجياً	سريع	نمو بمعدل ثابت عبر الزمن	<u>النمط</u>
يتناسب مع عدد السكان ومع الفرق بين عدد السكان والقيمة القصوى له	يتناسب مع القيمة الحالية لعدد السكان	ثابت	<u>معدل النمو</u> $\frac{dP}{dt}$
منحنى على شكل حرف S	خط منحنى يزداد بشكل أسّي	خط مستقيم	<u>الشكل الهندسي</u>
موجود	لا يوجد	لا يوجد	<u>القيمة القصوى</u> <u>لقيود الموارد</u> <u>والتنافس بين</u> <u>الأفراد</u>
- نمو السكان والنباتات والمحاصيل - نمو بكتيريا - انتشار التكنولوجيا والابتكارات - نمو الأورام والخلايا السرطانية - انتشار الأوبئة والأمراض المعدية - نمو الشركات والأعمال التجارية - انتشار الشائعات والأخبار	- انحلال النظائر المشعة - تفكك الجزيئات الكيميائية - نمو الفائدة المركبة - انتشار الأشعة السينية	- تكلفة الخدمات - الإيرادات الثابتة - الاستهلاك الثابت للموارد - سرعة ثابتة لجسم متحرك - نمو الطول لدى الأطفال - العلاقة بين القوة والازاحة - التغير الحراري الخطي - العلاقة بين الضغط والحجم	<u>الظواهر العلمية</u>
$P(t) = \frac{L}{\left(1 + \frac{L - P_0}{P_0}\right) e^{-r(t - t_0)}}$	$P(t) = P(t_0) e^{r(t - t_0)}$	$P(t) = m \cdot t + P(t_0)$	<u>الصيغة الرياضية</u>
$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{L}\right)$ r: معدل نمو النمو اللوجستي. L: القيمة القصوى للنمو.	$\frac{dP}{dt} = rP$ r: معدل النمو أو التضاؤل الأسّي.	$\frac{dP}{dt} = m$ m: معدل النمو الثابت	<u>المعادلة</u> <u>التفاضلية</u>
 شكل حرف S	 شكل حرف L	 	<u>المنحنى البياني</u>

2.3.3 معادلات النمو اللوجستي العامة

تعد معادلة النمو اللوجستي العامة نموذجًا لنمو السكان مع تعديل على معادلة النمو اللوجستي التقليدية. بينما يستخدم النموذج التقليدي مربعًا لسعة التحمل يستخدم هذا النموذج سعة تحمل تؤثر على سلوك الحل.

اسم المعادلة	المعادلة
النمو اللوجستي العام	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$
النمو اللوجستي مع معدل نمو متغير	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \beta P^2$
النمو اللوجستي مع معدل نمو يعتمد على الكثافة	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - aP^2$
النمو اللوجستي مع تأثير العوامل البيئية	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - cPQ$
النمو اللوجستي مع تأخير في التأثير	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - k \frac{dP}{dt}$
المعادلة التفاضلية مع حد أدنى	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) + d$
المعادلة التفاضلية مع انحراف	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{(P+d)}{K} \right)$
المعادلة التفاضلية متعددة المراحل	$\frac{dP}{dt} = r_1 P \left(1 - \frac{P}{K_1} \right) + r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) + \dots$
المعادلة التفاضلية للنمو اللوجستي مع تأثير الإنتاج	$\frac{dP}{dt} = -nrP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right) \left(\frac{P(t)}{P_0} - 1 \right)^n$

2.3.4 أمثلة

• تفريغ المكثف في دائرة كهربائية

القانون (حل المعادلة التفاضلية)	الظاهرة العلمية	نوع التغير	المعادلة التفاضلية
$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$	تفريغ المكثف في دائرة RC	خطي	$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q$
$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$	تفريغ المكثف في دائرة LC	خطي	$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{LC} Q$
$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \sin(\omega_d t + \phi)$	تفريغ المكثف في دائرة LRC	غير خطي	$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{R} Q - \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}$

القانون (حل المعادلة التفاضلية)	الظاهرة العلمية	نوع التغير	المعادلة التفاضلية
$[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$	تفاعل انحلال من الدرجة الأولى	خطي	$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$
$\frac{1}{[A](t)} = \frac{1}{[A]_0} + kt$	تفاعل تكوين من الدرجة الثانية	غير خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$
$[A](t) = [A]_0 + k[B]_0 t$	تفاعل تكوين من المرحلة الأولى	خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[B]$
$v = k[A]^m [B]^n [C]^p \dots$	تفاعل تكوين من الدرجة n	غير خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$

2.4 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
تسارع النمو السكاني بالنسبة لسرعته	$\frac{d^2 N}{dt^2} = r \frac{dN}{dt}$
التأرجح الهرموني	$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$
التذبذب الكهربائي	$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$
الحركة الكهربائية	$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$
الاهتزاز الميكانيكي	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0$

■ للمزيد من تطبيقات المعادلات التفاضلية يمكنكم تصفح المرجعين: [1] و [2]