

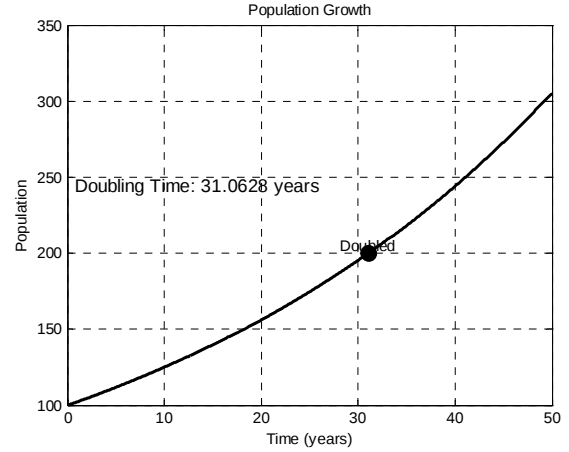
3 تمارين محلولة

■ لمزيد من التمارين والتطبيقات في المعادلات التفاضلية، يمكنكم تصفح المرجع رقم [3]

Exercise 1

Population has increased to 25% in 10 yrs,
how long will it take to become double?

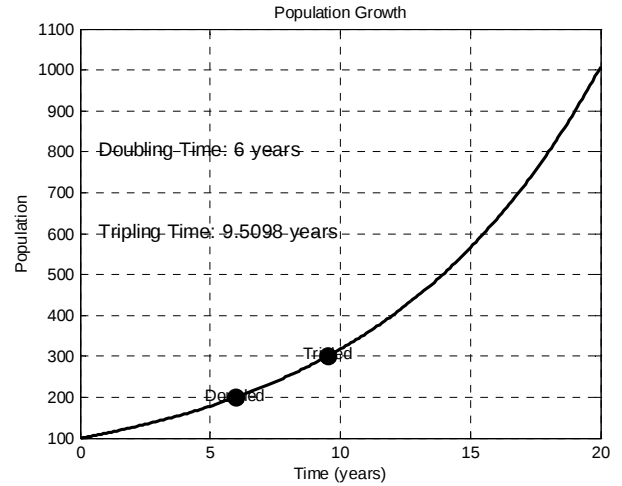
تزايد عدد السكان بنسبة 25 بالمائة في 10 سنوات، كم ينبغي
من عدد السنوات ليصبح الضعف؟



Exercise 2

عدد سكان لمجتمع ما يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الأشخاص
الموجودين في وقت محدد t .
إذا تضاعف عدد السكان في 6 سنوات ، فما المدة التي
سيستغرقها ليصبح ثلاثة أضعاف؟

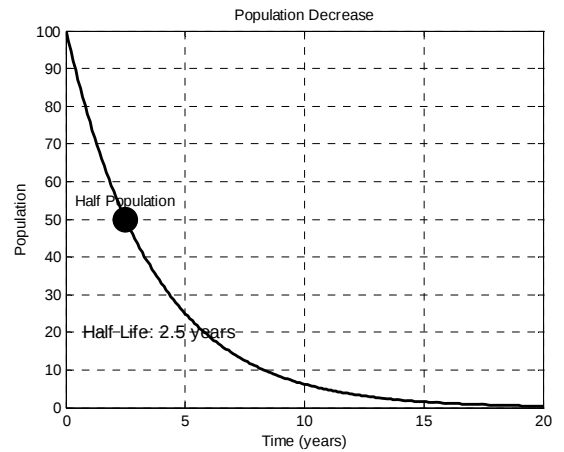
The population of a community is known to
increase at a rate proportional to the number
of people present at a time t . If the
population has doubled in 6 years, how long
it will take to triple?



Exercise 3

لنفرض أن التغير الديمغرافي لبلد ما يتناقص بمعدل يتناسب
مع عدد سكانه. إذا انخفض عدد السكان إلى 25% من العدد
الأصلي بعد T سنة بحيث $T < 10$ ، فكم من الوقت سيستغرق
حتى يصل عدد السكان إلى نصف العدد الأصلي؟

Let population of country be decreasing at
the rate proportional to its population. If the
population has decreased to 25% in T Ys
($T < 10$), how long will it take to be half?

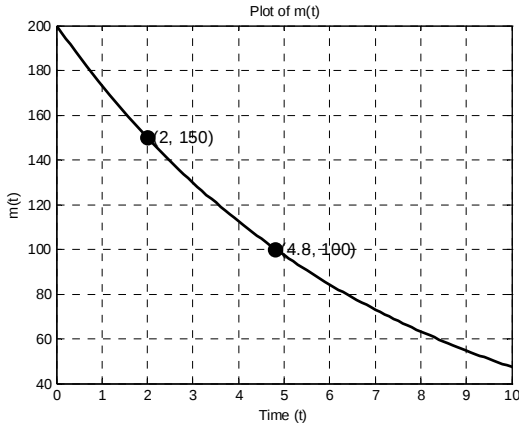


Exercise 4

A radioactive isotope has an initial mass 200 mg, which two years later is 150 mg.

Find the expression for the amount of the isotope remaining at any time.

What is its half-life?



يحتوي نظير مشع على كتلة أولية تبلغ 200 مللي جرام، وبعد عامين تصبح الكتلة 150 مللي جرام.

(أ) اوجد المعادلة التي تمثل كمية النظير المتبقية في أي وقت.

(ب) ما هو نصف-عمر النظير المشع (الوقت الذي يستغرقه النشاط الإشعاعي للنظير ليقل إلى نصف قيمته الأصلية).

Exercise 5

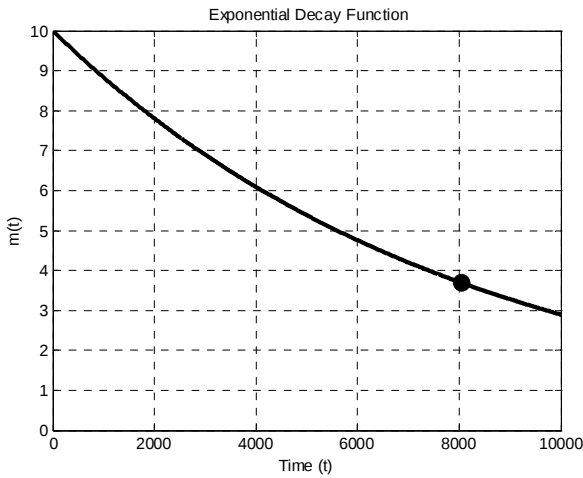
لنفترض أن لدينا قطعة أثرية، على سبيل المثال قطعة من الخشب

المتحجر، وتظهر القياسات أن نسبة C^{14} إلى الكربون في العينة تبلغ

37% من النسبة الحالية. نفترض أن الخشب تحلل في الزمن 0.

احسب الزمن T الذي يستغرقه جرام واحد من الكربون المشع حتى يتحلل

بهذا المقدار (نصف عمر C^{14} هو 5568 سنة $\approx$ 5600 سنة).



Suppose that we have an artifact, say a piece of fossilized wood, and measurements show that the ratio of C^{14} to carbon in the sample is 37% of the current ratio.

Assume that the wood died at time 0. Compute the time T it would take for one gram of the radio active carbon to decay this amount

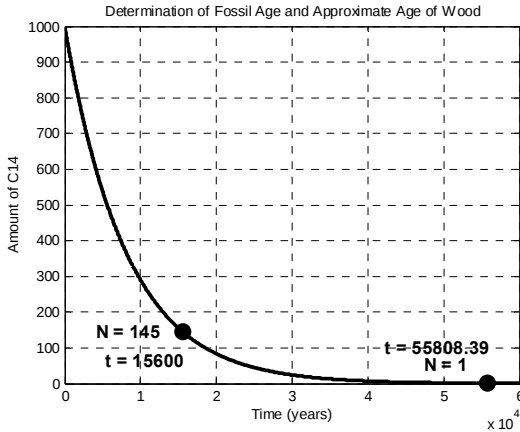
(The Half-life of C^{14} is $l = 5568 \text{ Ys} \approx 5600 \text{ Ys}$.)

Exercise 6

(a) A fossilized bone is found to contain one thousandth the original amount of C^{14} .

Determine the age of fossil.

(b) Use the information provided in part (a) to determine the approximate age of a piece of wood found in an archaeological excavation at the site to date prehistoric paintings and drawing on the walls and ceilings of a cave in Lascaux, France, provided 85.5% of the C^{14} had decayed. The Half-life of C^{14} is ≈ 5600 Ys



(أ) تم العثور على عظمة متحجرة تحتوي على واحد من ألف من الكمية الأصلية للكربون 14. حدد عمر الحفريّة.

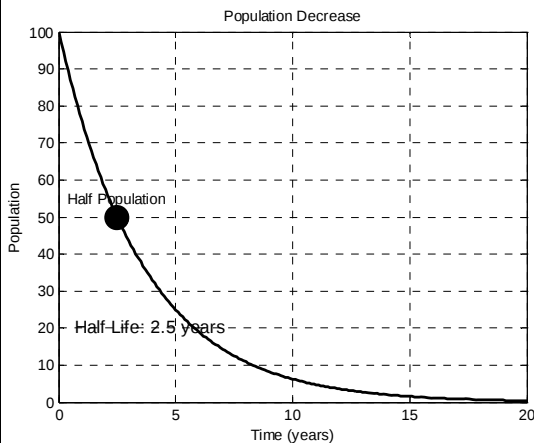
(ب) استخدم المعلومات الواردة في الجزء (أ) لتحديد العمر التقريبي لقطعة خشب تم العثور عليها في حفريات أثرية في نفس الموقع ، بحيث يكون 85.5% من الكربون 14 قد تحلل. نعتبر أن نصف عمر الكربون 14 ≈ 5600 سنة

Exercise 7 :

A tank contains 300 liters of fluid in which 20 grams of salt are dissolved.

Brine containing 1 gm of salt per liter is then pumped into the tank at a rate of 4 L/min; the well-mixed solution is pumped out at the same rate.

Find the number $N(t)$ of grams of salt in the tank at time t .



يحتوي خزان سعة 300 L من سائل يتم إذابة 20 g من الملح فيه.

يتم ضخ محلول ملحي يحتوي على 1 g جرام من الملح لكل 1 L إلى داخل الخزان بمعدل 4 L/min ثم يتم ضخ المحلول المخلوط الناتج الى خارج الخزان بنفس المعدل. ماهي كمية الملح $N(t)$ في الخزان عند الزمن t ؟

Exercise 8 :

A 100-volt electromotive force is applied to an RC series circuit in which the resistance is 200 ohms and the capacitance is 10^{-4} farads

- Find the charge $q(t)$ on the capacitor if $q(0)=0$.
- Find the current $i(t)$.

يتم تطبيق قوة دافعة مقدارها $E(t) = 100$ volts على دائرة كهربائية حيث المقاومة تساوي $R=200$ Ohms والسعة $C=10^{-4}$ Farads
(a) أوجد شحنة المكثف $q(t)$ إذا كانت القيمة الأولى للشحنة $q(0)$ تساوي 0.
(b) أوجد التيار اللحظي $i(t)$ في الدارة.

Exercise 9:

Set an electrical circuit LCR. Find the charge $q(t)$ on the capacitor, and the current $i(t)$, for an time t , if the inductance $L=1$ Henry (H) , the Resistance $R=300$ ohms, the capacitance $C=5.10^{-5}$ farads and at $t=0$ the switch is closed to a 40-volt battery.

Furthermore it is assumed that $q(0) = i(0) = 10^{-7}$

يتم توصيل دائرة كهربائية LCR بالمعطيات التالية:

الوشية $L=1$ Henry

المقاومة $R=300$ ohms

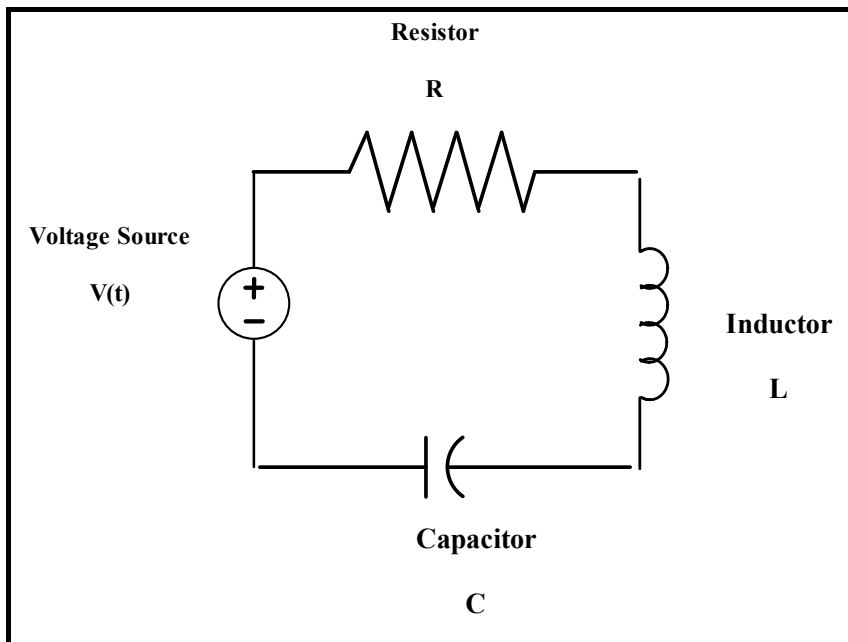
السعة $C=5.10^{-5}$ farads

الشحنة الأولية للمكثف $q(0) = 10^{-7}$ Coulombs

التيار الكهربائي الأولي $i(0) = 10^{-7}$ Amperes

الجهد الكهربائي المؤثر $E = 40$ Volts (يُفترض بعد إغلاق المفتاح عند $t = 0$)

المطلوب: إيجاد شحنة المكثف $q(t)$ والتيار الكهربائي $i(t)$ بدلالة الزمن t



Solution Of Exercise 1 :

إذا فرضنا أن تغير دالة عدد السكان بالنسبة للزمن متناسبة مع هذه الدالة بنسبة ثابتة ولتكن k ، فإن:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad k > 0$$

بحل المعادلة التفاضلية السابقة نجد:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$$\ln P = kt + C$$

لتكن القيمة الابتدائية لعدد السكان هي P_0 . إذن عند $t = 0$ نجد :

$$\ln P_0 = 0 + C$$

$$C = \ln P_0$$

$$\ln P = kt + \ln P_0$$

$$\ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = kt$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

إذا كان $t = 10$ فإن

$$P(10) = P_0 e^{10k} = P_0 + \frac{P_0}{4} = \left(1 + \frac{1}{4}\right) P_0 = \frac{5}{4} P_0$$

$$1.25 P_0 = P_0 e^{10k}$$

$$e^{10k} = 1.25$$

$$k = \frac{\ln(1.25)}{10} \times 0.02$$

لنبحث عن الزمن t عندما يزداد عدد السكان مرتين $P = 2P_0$ نجد :

$$2P_0 = P_0 e^{kt}$$

$$2 = e^{kt}$$

$$t = \frac{\ln 2}{k} = 10 \frac{\ln 2}{\ln(5/4)} \approx 31.0628 \text{ Ys}$$

فنتنتج أن المدة الزمنية اللازمة ليزداد عدد السكان مرتين هي حوالي 31 سنة.

$$t_{2P_0} \approx 31.0628 \text{ Ys}$$

Solution Of Exercise 2 :

لنعتبر $N(t)$ هو عدد السكان في الزمن t .

لنعتبر $N(0)$ هو السكان الأولي (عدد السكان في $t = 0$).

لدينا المعادلة التفاضلية حسب الشروط:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

أي $N(t) = Ae^{kt}$ ، حيث $A = N(0)$. فنستنتج قيمة الثابت k :

$$Ae^{6k} = N(6) = 2N(0) = 2A$$

$$e^{6k} = 2$$

$$k = \frac{1}{6} \ln 2$$

لنبحث عن الزمن t عندما يكون $N(t) = 3A = 3N(0)$

$$N(0)e^{kt} = 3N(0)$$

$$3 = e^{\frac{1}{6}(\ln 2)t}$$

$$\ln 3 = \frac{(\ln 2)t}{6}$$

$$t_{3N(0)} = \frac{6 \ln 3}{\ln 2} = 9.6 \text{ Ys}$$

فنستنتج أن المدة الزمنية التي من خلالها يتزايد عدد السكان ثلاث مرات تزيد عن 9 سنوات.

Solution Of Exercise 3 :

بما أن عدد السنوات لا يتجاوز 10 سنوات فيمكن تمثيل تناقص عدد السكان باستعمال النموذج الأسّي،

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \quad \text{ومنه المعادلة التفاضلية الآتية:}$$

التي حلها هو: $N(t) = N(0)e^{kt}$ بحيث $N(0)$ هو عدد السكان في البداية.

لنبحث عن الثابت k بحيث $k < 0$:

$$N(T) = N(0)e^{kT} = \frac{1}{4}N(0)$$

$$e^{kT} = \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{4} = \frac{-2 \ln 2}{T} < 0$$

فستنتج أن الزمن اللازم $t_{1/2}$ لينقص نصف عدد السكان هو :

$$N(0)e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2}N(0)$$

ومنه :

$$e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$kt_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-2 \ln 2 / T} = \frac{T}{2}$$

أي أن :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{T}{2}}$$

إذا كان مثلاً $T = 5$ ، فإن نصف حياة تناقص عدد السكان هو 2.5 سنة.

Solution Of Exercise 4 :

لتكن m كتلة النظير المشع المتبقية بعد t سنة، وليكن k ثابت التناسب.

إذن معدل التحلل يكتب على الشكل :

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

فنستنتج أن :

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 200e^{kt}$$

ومنه :

$$m(2) = 200e^{2k} = 150$$

أي أن :

$$e^{2k} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

$$2k = \ln \frac{3}{4}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = -0.1438 < 0$$

إذن كتلة النظير المشع المتبقية بعد t سنة هي:

$$m(t) = 200e^{-0.1438 t}$$

زمن نصف-حياة النظير المشع $t_{1/2}$ الموافق لـ $m = 100$ mg يحقق:

$$100 = 200 e^{k t_{1/2}}$$

ومنه :

$$e^{k t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$k t_{1/2} = \ln(0.5)$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\frac{1}{2} \ln(0.75)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.75)} \times 2 \approx 4.8188 \text{ Ys}$$

فنستنتج أن نصف حياة النظير المشع تقترب إلى خمس سنوات.

$$t_{1/2} \approx 4.8188 \text{ Ys}$$

Solution Of Exercise 5 :

لتكن $m(t)$ كتلة C^{14} النظير المشع لـ C^{12} المتبقية بعد t سنة، وليكن k ثابت التناسب.

إذن معدل التحلل يُكتب على الشكل:

$$\frac{dm}{dt} = km$$
$$m(t) = m(0)e^{kt} = M_0 e^{kt}$$

بحيث M_0 هي الكتلة الابتدائية قبل بداية تحلل C^{14} .

إذا حصلنا M_T غرام بعد زمن T ، فإن:

$$m(T) = M_T = M_0 e^{kT}$$
$$\ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right) = kT$$
$$k = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right)$$

$$m(t) = M_0 e^{\frac{t}{T} \ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right)} \quad \text{فستنتج أن:}$$

ليكن λ الزمن اللازم للإشعاع الكلي لنصف كتلة C^{14} ، لدينا إذن :

$$M_\lambda = \frac{M_0}{2}$$
$$\frac{M_\lambda}{M_0} = \frac{1}{2}$$

$$m(t) = M_0 e^{\frac{\ln(1/2)}{\lambda} t} = M_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda} t}$$

$$M_T = m(T) = M_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda} T} \quad \text{فإن:} \quad \frac{M_T}{M_0} = 37\% = 0.37 \quad \text{بما أن}$$

$$\frac{M_T}{M_0} = 0.37 = e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda} T}$$

$$\ln(0.37) = \frac{\ln(0.5)}{\lambda} T$$

$$T = \frac{\ln(0.37)}{\ln(0.5)} \lambda \approx \frac{\ln(0.37)}{\ln(0.5)} \times 5600 \approx 8032.64 \text{ Ys}$$

$$\boxed{T \approx 8032.64 \text{ Ys}}$$

Solution Of Exercise 6 :

(a) المعادلة التفاضلية الممثلة لهذه الظاهرة العلمية تُكتب على الشكل:

$$\frac{dN}{dt} = k N(t)$$

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

بحيث k يمثل ثابت تناسب الاضمحلال.

إذا افترضنا أن نصف حياة C^{14} هو بالتقريب 5600 Ys ، فإن:

$$\frac{N_0}{2} = N(\lambda)$$

ومنه:

$$N_0 = N_0 e^{\lambda k}$$

$$\lambda k = \ln \frac{1}{2} = \ln(0.5)$$

$$k = \frac{\ln(0.5)}{\lambda} = \frac{\ln(0.5)}{5600} = -0.00012378$$

بما أن : $\frac{N_t}{N_0} = \frac{1}{1000}$ ، فإن :

$$\frac{N_0 e^{kt}}{N_0} = \frac{1}{1000}$$

$$kt = 0.001$$

$$t_{fossil} = \frac{0.001}{k} = \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)} \lambda = \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)} \times 5600 = 55808.39 \text{ Ys}$$

(b) إذا كانت نسبة اضمحلال C^{14} هي 85.5% ، فإن :

$$\frac{N_t}{N_0} = 1 - \frac{85.5}{100} = \frac{100 - 85.5}{100} = \frac{14.5}{100} = 0.145$$

$$\frac{N_0 e^{kt}}{N_0} = 0.145$$

$$e^{kt} = 0.145$$

$$t_{wood} = \frac{\ln(0.145)}{k} = \frac{\ln(0.145)}{\ln(0.5)} \lambda = \frac{\ln(0.145)}{\ln(0.5)} \times 5600 = 15600 \text{ Ys}$$

$$t_{fossil} = 55808.39 \text{ Ys} \text{ and } t_{wood} = 15600 \text{ Ys}$$

Solution Exercise 7 :

لتكن N نسبة تغير الملح في الخزان بدلالة الزمن ، إذن:

$$N(0) = 20$$

يتم ضخ محلول ملحي يحتوي على 1 g من الملح لكل 1 L إلى داخل الخزان بمعدل 4 L/min

أي في كل دقيقة واحدة يتم ضخ داخل الخزان 4 غرام وفي نفس المدة الزمنية يتم إخراج 4 L من سعة 300 L أي ما يكافيء

$$\text{بالغرام : } \frac{4}{300}N = \frac{N}{75} \text{ ، ومنه :}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = 4 - \frac{N}{75}$$

فنتحصل على المعادلة التفاضلية الخطية الآتية :

$$(22.1) \quad \frac{dN(t)}{dt} + \frac{N}{75} = 4$$

التي يمكن حساب معامل تكاملها:

$$e^{\int \frac{1}{75} dt} = 75 \cdot e^{\frac{1}{75}t}$$

ومنه :

$$N(t) \cdot e^{\frac{1}{75}t} = \int 4 e^{\frac{1}{75}t} dt + C = 4 \times 75 \times e^{\frac{1}{75}t} + C$$

$$N(t) = 300 + C e^{-\frac{1}{75}t}$$

بما أن : $N(0) = 20$ فإننا نتحصل على $20 = N(0) = 300 + C e^0$ ، أي أن $C = -280$

فنستنتج :

$$N(t) = 300 - 280 \cdot e^{-\frac{1}{75}t}$$

Solution Exercise 8 :

المعادلة التفاضلية (23.1) الممثلة لتوزيع RC في الدارة الكهربائية هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى :

(23.1)

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

بحيث:

$$R=200 \text{ Ohms}, C=10^{-4} \text{ Farads}, E(t) = 100 \text{ Volts}$$

ومنه

(24.1).

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{200} 10^4 q(t) = \frac{1}{2}$$

باستعمال معامل التكامل (المعادلة (35.1) في الملحق التوضيحي) نحسب حل المعادلة (24.1) :

$$e^{\int 50 dt} = e^{50t}$$

نجد:

$$q(t) e^{50t} = \frac{1}{2} \int e^{50t} dt + C$$

$$q(t) = \frac{1}{100} + C e^{-50t}$$

$$q(0) = 0 = \frac{1}{100} + C e^0$$

$$C = -\frac{1}{100}$$

$$q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100} e^{-50t}$$

بما أن قيمة $i(t)$ شدة التيار الكهربائي تكون بدلالة تغير الشحنة الكهربائية $dq(t)$ بالنسبة لتغير الزمن dt فإن :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 0 - (-50t) \frac{1}{100} e^{-50t}$$

ومنه

$$q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100} e^{-50t}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} e^{-50t}$$

Solution Exercise 9:

الدائرة الكهربائية LRC يمكن تمثيلها بالمعادلة (25.1) :

$$(25.1) \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = V(t)$$

بحيث: $L=1, R=300, C=5 \times 10^{-5}, V(t)=40$

ومنه

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{5 \times 10^{-5}} = \frac{10^5}{5} = \frac{10}{5} \times 10^4 = 2 \times 10^4 = 20000$$

بالتعويض في (25.1) نحصل على المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة بمعاملات ثابتة (26.1).

$$(26.1) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 300 \frac{dq}{dt} + 20000q = 40$$

حلها العام $q(t)$ يحقق الشروط الابتدائية :

$$(27.1) \quad q(0) = i(0) = \frac{dq}{dt} = 0$$

المعادلة المساعدة الموافقة لـ (26.1) تكتب على الشكل:

$$m^2 + 300m + 20000 = 0$$

التي جذراها هما: $m_1 = -100, m_2 = -200$ ومنه الحل المتجانس لـ (26.1) هو:

$$q_h(t) = c_1 e^{-100t} + c_2 e^{-200t}$$

بما أن $E(t)$ قيمة ثابتة ، نستعمل طريقة المعاملات غير المحددة لاستنتاج حل خاص ثابت $q_p(t) = C$ يحقق (26.1)

$$0 + 300 \times 0 + 20000 \times C = 40 \Rightarrow q_p(t) = C = \frac{40}{20000} = \frac{4}{2000} = \frac{2}{1000} = 2 \times 10^{-3}$$

ومنه نحصل على الحل العام

$$(28.1) \quad q_g(t) = q_h(t) + q_p(t) = c_1 e^{-100t} + c_2 e^{-200t} + 0.002$$

باستعمال الشرطين الابتدائيين (27.1) وبالتعويض في المعادلة (28.1) نستنتج :

$$c_1 + c_2 + 0.002 = 0$$

(29.1)

$$-100c_1 - 200c_2 = 0$$

نحل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين c_1, c_2 (29.1) :

$$\begin{cases} c_2 = +0.002 \\ c_1 = -0.004 \end{cases}$$

بالتعويض في (28.1) نحصل على:

$$q(t) = 0.002 \left(-2 e^{-100t} + e^{-$$

4 ملحق توضيحي

4.1 تصنيف المعادلات التفاضلية

Equation	Type
$\frac{dy}{dt} = m$	Linear Ordinary Differential Equation معادلة تفاضلية عادية خطية (حل تألفي خطي)
$\frac{dy}{dt} = m \cdot y(t)$	First-Order Separable ODE خطية من الرتبة الأولى قابلة للفصل (حل أسي)
$\frac{dy}{dt} + a(t)y(t) = b(t)$	First-Order non separable ODE غير قابلة للفصل (حل لوجستي)
$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$	Second-Order Linear ODE خطية من الرتبة الثانية (حل مثلثي)
$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	First-Order Linear Partial Differential Equation (PDE) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى Advection equation معادلة النقل أحادية البعد مع سرعة ثابتة
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	Second-Order Linear Hyperbolic (Wave Equation) المعادلة الزائدية للموجة الأحادية الأبعاد (صوتية أو ضوئية)
$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	Second-Order Linear Parabolic PDE (Heat Equation) المعادلة المكافئة للانتقال الحراري الأحادية الأبعاد
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	Second-Order Linear Elliptic PDE (Harmonic Laplace Equation) معادلة لابلاس الناقصية المتجانسة للانتشار الموجي والتوصيل الحراري في ثلاثة أبعاد

4.2 طريقة معامل التكامل لحل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 1

$$(30.1) \quad \frac{dy}{dt} + a(t)y(t) = b(t)$$

1. إيجاد معامل التكامل μ للمعادلة (30.1) :

$$(31.1) \quad \mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

2. اضرب كلا جانبي المعادلة الأصلية (30.1) في معامل التكامل (31.1) :

$$(32.1) \quad \mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y(t) = \mu(t)b(t)$$

3. على الجانب الأيسر من المعادلة (32.1)، يمكننا استخدام قاعدة اشتقاق جداء دالتين :

$$(33.1) \quad \frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)b(t)$$

4. قم بتكامل كلا جانبي المعادلة (33.1) بالنسبة إلى t:

$$(34.1) \quad \int \frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) dt = \int \mu(t)b(t) dt$$

$$(35.1) \quad \mu(t)y(t) = \int \mu(t)b(t) dt + C$$

5. اقسّم كلا الجانبين من المعادلة (35.1) على معامل التكامل لإيجاد الحل العام :

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)b(t) dt + C \right)$$

4.3 حل المعادلة التفاضلية اللوجستية

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{L} \right)$$

حيث:

• $P(t)$ يمثل حجم السكان في الزمن t .

• r هو معدل النمو.

• L هو القدرة الاستيعابية (أقصى حجم للسكان).

لنقم بحل هذه المعادلة التفاضلية باستخدام الشرط الابتدائي $P(t_0) = P_0$ ، حيث P_0 هي قيمة الحجم الابتدائي للسكان عند الزمن الابتدائي t_0

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{L} \right)$$

$$\int_{t_0}^T dP \frac{1}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{L} \right)} = \int_{t_0}^T r dt$$

$$\ln \left| \frac{P(T)}{L - P(T)} \right| - \ln \left| \frac{P(t_0)}{L - P(t_0)} \right| = r (T - t_0)$$

$$\frac{P(T)}{L - P(T)} = \left(\frac{P(t_0)}{L - P(t_0)} \right) e^{r(T - t_0)} = A e^{r(T - t_0)}$$

$$P(T) = \frac{L}{1 + A^{-1} e^{-r(T - t_0)}}$$

$$P(T) = \frac{AL}{A + e^{-r(T - t_0)}}$$

$$P(T) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L - P(t_0)}{P(t_0)} \right) e^{-r(T - t_0)}}$$

ومنه الحل النهائي المختصر:

$$P(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L - P_0}{P_0} \right) e^{-r(t - t_0)}}$$

الذي يصف النمو السكاني مع مرور الزمن، ابتداءً من حجم السكان الابتدائي P_0 ، بمعدل النمو r ، ويصل إلى القدرة الاستيعابية L .