الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة محمد بوضياف بالمسيلة كلية الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

تطبيقات الرياضيات في العلوم

D411 Applications of mathematics to other sciences

السنة الجامعية: 2023- 2024

الفصل الأول: الرياضيات وتطبيقاتها عبر التاريخ 1
1.1 تحليل الظواهر العلمية 1
1.2 المراحل التاريخية لتطبيق الرياضيات 4
1.3 تطبيقات الرياضيات في علم الفيزياء 10
1.4 تطبيقات الرياضيات في علم الأحياء 11
1.5 استخدامات الرياضيات في علوم الكمبيوتر 12
2 الفصل الثاني: تطبيقات المعادلات التفاضلية 14
2.1 طرق حلول المعادلات التفاضلية الخطية 14
2.2 تطبيقات المعادلات التفاضلية في الظوهر الديناميكية 18
2.3 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى 21
2.4 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية 25
3 تمارين محلولة 26
4 ملحق توضيحي 39
4.1 تصنيف المعادلات التفاضلية 39
4.2 طريقة معامل التكامل لحل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 1 40
4.3 حل المعادلة التفاضلية اللوجستية 41
المراجع : 42

الفصل الأول: الرياضيات وتطبيقاتها عبر التاريخ

1.1 تحليل الظواهر العلمية

<u>الظاهرة العلمية هي حدث قابل للتجربة ثم للملاحظة والتكرار، ويمكن تفسيره من خلال المنهج العلمي.</u>

خصائص الظواهر العلمية	أمثلة عن الظواهر العلمية	أمثلة عن الظواهر غير العلمية
<u>قابلة للملاحظة:</u> يمكن للعالِم ملاحظتها بشكل مباشر أو غير مباشر	سقوط الأجسام على الأرض	وجود الأشباح، المنازل المسكونة، التحكم عن بعد.
<u>قابلة للتكرار:</u> يمكن إعادة إنتاجها في ظل ظروف محددة	جاذبية الأجسام، تفاعلات كيميائية، تطور بيولوجي حركة الكواكب حول الشمس	تأثير التنجيم على حياة الإنسان
<u>قابلة للقياس:</u> يمكن قياس خصائصها بدقة	تغير لون ورقة شجرة من الأخضر إلى الأصفر في فصل الخريف	قراءة أفكار الآخرين، الخرافات الشعبية، التنجيم، الظواهر الخارقة للطبيعة
<u>قابلة للتفسير:</u> يمكن تفسيرها من خلال قوانين علمية	تفاعل المواد الكيميائية مع بعضها البعض الطيف الكهرومغناطيسي، البنية الذرية، الرسالة الوراثية	تجربة الخروج من الجسد، أساطير المخلوقات الخرافية
<u>قابلة للتنبؤ:</u> يمكن التنبؤ بسلوكها في المستقبل	سلوك الحيوانات في بيئتها الطبيعية	الإيمان بوجود قوى خارقة للطبيعة
<u>تتبع أساليب منطقية ومنهجية</u>	عملية التمثيل الضوئي، دورة الماء، نظرية النسبية	الأساطير الحضارية، العلاجات الشعبية التنبؤ، الأحلام

الظاهرة	قابلة للتجربة	قابلة للتحليل إلى معادلات	المعادلة
تكوين السحب والغيوم	نعم	نعم	$f(x, y, z, t) = 0$
تكوين الكريستالات والبلورات	نعم	نعم	$F(x, y, z) = 0$
تكوين الأمواج البحرية	نعم	نعم	$A(x,t) = 0$
تشكيل الأنهار والوديان	نعم	نعم	$\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$
تفاعلات البيئة البحرية	نعم	نعم	$V(t) = 0$
ديناميكية الغلاف الجوي	نعم	نعم	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla\cdot(\rho \mathrm{v}) = 0$
حركة الكواكب والنجوم القريبة	نعم	نعم	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
تشكيل المجرات القريبة	نعم	نعم	$f(x, y, z, t) = 0$
تأثيرات المد والجزر	نعم	نعم	$h(x, y, t) = 0$
الظواهر الاجتماعية	نعم	لا	الثقافة، السلوك البشري (تفاعلات، علاقات) ، التاريخ
الظواهر النفسية والروحية	نعم	لا	العواطف، التفكير، التصرفات، اللاوعي، الأحلام، الإيمان
الظواهر البيولوجية و العلمية	نعم	لا	النمو والتطور،الأمراض، تأثيرات الهرمون، الجاذبية، الحياة
الظواهر الفلسفية	نعم	لا	الوجود، الوعي، المعنى، القيم،الأخلاق
الظواهر الثقافية والفنية	نعم	لا	اللغة ،الأدب، والعقائد الدينية، الإبداع مثل الموسيقى والرسم والكتابة.
تشكيل الثقوب السوداء	لا	نعم	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$
الانصهار النووي في النجوم	لا	نعم	$E = mc^2$
الحركة في الأبعاد الإضافية	لا	نعم	$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = c^2$
تفاعلات التحول النووي داخل النجوم	لا	نعم	$E_f - E_i = Q$

الفجوات الزمنية في البعد الرابع	لا	نعم	$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = 8\pi GT_{ik}$
تفاعلات البلورات في الأبعاد الفضائية	لا	نعم	$E = hv$
أحداث داخل الثقب الأسود	لا	نعم	$r_s = \frac{2GM}{c^2}$
الحركة عند الأبعاد الفضائية الإضافية	لا	نعم	$S = \int_a^b Ldt$
تأثيرات الزمن المنسدل في الفراغ	لا	نعم	$g_{tt} = - c^2$
نشأة الكون	لا	لا	الانفجار العظيم؟ التضخم الكوني؟
الوعي	لا	لا	الوعي البشري؟ الوعي الحيواني؟
الحياة	لا	لا	أصل الحياة؟ الحياة على كواكب أخرى؟
المادة المظلمة والطاقة المظلمة	لا	لا	27%؟ أم 68%؟
السفر عبر الزمن	لا	لا	إلى الماضي أم إلى المستقبل؟
الأبعاد الإضافية	لا	لا	وجودها؟ خصائصها؟
التخاطر	لا	لا	قراءة الأفكار؟ الرؤية عن بعد؟
الأشباح	لا	لا	أرواح الموتى؟ التنبؤ بالمستقبل؟
الظواهر الكونية الفلكية	لا	لا	حركة الكواكب والنجوم البعيدة؟
الظواهر الجيولوجية الكبيرة	لا	لا	تشكل الجبال؟ تكون القارات؟ الزلازل؟ البراكين ؟
الظواهر الجوية الكبرى	لا	لا	الأعاصير؟ الأمطار الغزيرة ؟ البرق ؟ الرعد ؟
الظواهر البيولوجية الكبيرة	لا	لا	تطور الكائنات الحية ؟ التفاعلات البيئية الكبيرة ؟
الظواهر الفيزيائية الكبرى	لا	لا	التفاعلات النووية؟ تغير الجاذبية بالنسبة للزمن؟ الانفجاريات الكونية؟

1.2 المراحل التاريخية لتطبيق الرياضيات

1.2.1 مرحلة الخوارزميات البدائية (من 3000 ق.م إلى 400 ق م)

- **الرقم والحساب:**

في التبادلات التجارية باستعمال المقايضة (النظام الستيني من 3000 ق.م إلى 600 ق.م)

- **حساب مساحة السطح:**

في الزراعة (السومريون، قبل 3000 ق.م.)

- **حساب الأحجام:**

في بناء المعابد الدينية (استخدام القدم المكعبة كوحدة لقياس الأحجام في مصر القديمة من 2000 ق.م - 1000 ق.م).

- **الحساب في علم الفلك:**

في التنبؤ بظواهر الأرصاد الجوية للزراعة، وإعداد التقاويم، وعلم التنجيم. (السومريون، قبل 3000 ق.م.)

1.2.2 مرحلة صيغ الرياضيات العامة (من 400 ق م إلى 1600 م)

1. **الرياضيات اليونانية**

ارتبطت الرياضيات اليونانية بالفلسفة، ثم أصبحت معرفة مطلقة مستقلة عن التجربة الحسية، بحيث يعتبر العالم طاليس (القرن 3 ق.م) أحد أوائل علماء الرياضيات اليونانيين الذي حاول تفسير الظواهر العلمية بواسطة الأسباب العلمية وليس بالأساطير. استطاع فيما بعد العالم أرخميدس (القرن 6 ق.م)، صياغة أول قانون فيزيائي للضغط في قوة طفو السوائل:

$$\boxed{F_{buoyant}(t) = \frac{d}{dt}\left(g \times \rho_{liquid}(t) \times V(t)\right)} \quad (1.1)$$

2. **الحضارة الإسلامية**

إنشاء "علم الفرائض والمواريث" من طرف العالم المسلم "محمد أبو موسى الخوارزمي " مؤسس الجبر و مؤلف كتاب " الجبر والمقابلة" الذي تمت كتابته حوالي عام 820 م الموافق لحوالي 206 هـ وفيه قدم العديد من التقنيات الرياضية الجديدة لحل المعادلات الخطية والتربيعية، التي أسهمت في تطوير الرياضيات واستمرت طوال التاريخ.

$$\boxed{x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad (2.1)$$

3. **الثورة الصناعية**

استطاع الإنسان في القرن السابع عشر استعمال التجربة في الفيزياء ودراسة الظواهر المتغيرة بدلالة الزمن باستعمال المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية، بحيث يُعتبر العالم البريطاني نيوتن من بين أوائل العلماء الذين استخدموا المعادلات التفاضلية بشكل فعّال لفهم ووصف التغيرات في الحركة والقوانين الفيزيائية سنة 1687.

$$\boxed{F_{net}(t) = m(t)\frac{d}{dt}v(t) = m(t)A(t)} \quad (3.1)$$

1.2.3 مرحلة المفاهيم الحديثة والبرمجة الآلية (من 1600 م إلى غاية العصر الحديث)

1. **الكواكب**

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1609	$r = a.\left(1 - e.\cos\left(\theta\right)\right)$	كبلر	قانون كبلر الأول (قانون المسارات)
1609	$\frac{dA}{dt} = k$	كبلر	قانون كبلر الثاني (قانون المساحات)
1619	$T^2 = k.a^3$	كبلر	قانون كبلر الثالث (قانون الزمن)
1662	$I = I_0.e^{-\alpha x}$	كبلر	انتشار الضوء
1929	$v = H_0.d$	إدوين هابل	قانون التمدد (سرعة الابتعاد)
1961	$N = R^{*}\cdot f_p\cdot n_e\cdot f_l\cdot f_i\cdot f_c\cdot L$	فرانك دريك	معادلة دريك لاحتمال وجود حياة في الكواكب الخارجية للكون

2. **السوائل والأجسام**

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1643	$v = \sqrt{2gh}$	توريسيلي	معادلة سرعة الماء
1643	$Q = Av$	توريسيلي	معادلة تدفق السائل
1662	$P = \frac{F}{A}$	باسكال	معادلة الضغط
1687	$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m.a$	نيوتن	معادلة نيوتن للحركة
1687	$\frac{d^2p}{dt^2} = c^2 . \nabla^2 p$	نيوتن	انتشار الصوت
1687	$F = G.\frac{(m_1 . m_2)}{r^2}$	نيوتن	قانون الجذب الكوني العام
1687	$\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = constant$	نيوتن	القانون الأول لنيوتن
1687	$F = m.a$	نيوتن	القانون الثاني لنيوتن
1687	$F_{12} = -F_{21}$	نيوتن	القانون الثالث لنيوتن
1738	$K.E = \frac{1}{2}mv^2$	جان برنولي	معادلة الطاقة الحركية
1916	$E = m.c^2$	ألبرت أينشتاين	معادلة تكافؤ الكتلة والطاقة

3. الالكترونات

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1678	$x(t) = A.\sin(\omega t + \varphi)$	كريستيان هيغنز	معادلة الموجة التوافقية
1785	$F = k\,.\dfrac{\mid q_1 . q_2 \mid}{r^2}$	كولوم	قانون كولومب للجاذبية الكهربائية
1788	$E = \dfrac{k\ .\ \lvert q \rvert}{r^2}$	كولوم	معادلة الطاقة الكامنة الكهرومغناطيسية لنقطة شحنة
1820	$F = B.I.L.\sin(\theta)$	أمبير	معادلة القوة المؤثرة على سلك موصل في مجال مغناطيسي
1822	$\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	فورييه ولابلاس	مؤثرات فورييه - لابلاس
1827	$V = I.R$	أوم	قانون أوم
1855	$\dfrac{dc}{dt} = D\,\nabla^2 c$	ثوماس جراهام	الانتشار الثنائي للغازات
1855	$\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$	ماكسويل	معادلة فارادي لحث التحريض الكهرومغناطيسي
1861	$\nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t}$	ماكسويل	معادلة ماكسويل للمغناطيسية
1867	$\nabla \times E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	ماكسويل	قانون التدفق لحساب المجال الكهربائي لشحنة
1873	$\oint_S B \cdot dA = \mu_0\left(\sum_i I_i + \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}\right)$	ماكسويل	حساب المجال المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي متغير
1873	$F = q.v.B.\sin(\theta)$	ماكسويل	معادلة القوة المغناطيسية لشحنة كهربائية
1884	$\dfrac{d[A]}{dt} = -\,k[A][B]$	فان ت هوف	معدل التفاعل الكيميائي
1895	$F = q(E + v \times B)$	لورنتز	القوة المؤثرة على جسيم مشحون يتحرك في مجال كهرومغناطيسي
1904	$m.\dfrac{d^2 x}{dt^2} = q.(E + v.B)$	لورنتز	معادلة لورنتز لحركة الجسيمات المشحونة في المجال الكهرومغناطيسي
1915	$R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$	ألبرت أينشتاين	معادلة الجاذبية للمجال المغناطيسي (النسبية العامة)
1915	$R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} R \gamma_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\Gamma}{\chi^4} T_{\mu\nu}$	ألبرت أينشتاين	معادلات حقول اينشتاين (النسبية العامة)
1916	$R_s = \dfrac{2GM}{c^2}$	كارل شوارزشيلد	معادلة نصف قطرالحد للجاذبية باستعمال الثابت الكوني (الثقب الأسود)
1926	$i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$	إرفين شرودنجر	معادلة شرودنجر للموجة
1926	$(ih\dfrac{\partial}{\partial t} - H)\psi = 0$	بول ديراك وإنريكو فيرمي	معادلة فيرمي-ديراك للحركة الكمومية

4. الغازات

التسمية	العالم	الصيغة	السنة
معادلة بويل	روبرت بويل	$P_1V_1 = P_2V_2$	1662
معادلة تشارلز	جاك تشارلز	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	1787
معادلة غاي لوساك	أمبرواز غاي لوساك	$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$	1802
معادلة الحالة المثالية للغازات	إميل كلابيرون	$PV = nRT$	1834
الانتشار الثنائي للغازات	ثوماس جراهام	$\frac{dc}{dt} = D\ \nabla^2 c$	1855
حركة جزيئات الغاز عبر الفراغ	لودفيغ بولتزمان	$\frac{df}{dt} + v\cdot\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$	1872
معادلة فان دير فالز	يوهانس فان دير فالز	$P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b}$	1873
معادلة توازن الغاز	مينورو ساها	$\frac{n_i^2}{n_e} = \left(\frac{2\pi m_e \hbar^2}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}$	1920

5. الكائنات الحية

التسمية	العالم	الصيغة	السنة
المعادلة التفاضلية للنمو السكاني ألأسي	فيرمات	$\frac{dN}{dt} = rN(t)$	1636
صيغة النمو ألأسي بإهمال العوامل المحددة لنمو السكان، مثل الموارد المحدودة أو التنافس (مثالية غير واقعية)	برنولي	$N(t) = N_0(t)e^{rt}$	1673
صيغة النمو اللوجستي للسكان، وهو نمو يتسارع في البداية ثم يتباطأ حتى يستقر عند سعة التحمل	بيير فرانسوا فيريت	$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-K(t-t_0)}}$	1838
تفاعل الفقاعات	راينهولت	$\frac{dp}{dt} = k(p_{sat} - p)$	1852
توازن التطور الطبيعي	هاردي-وينبرغ	$p = \frac{p^2}{p+q}$	1908
سلوك الإنزيم في الكائن الحي	مايكليس-منتون	$\frac{d[S]}{dt} = -\frac{V_{max}\cdot[S]}{(K_m + [S])}$	1913
المعادلة التفاضلية لنمو اللوجستي	رالف بيرل	$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$	1920
معادلة الفريسة-المفترس	لوتكا-فولتيرا	$\frac{dN_1}{dt} = r_1N_1 - \alpha N_1N_2$ $\frac{dN_2}{dt} = -\beta N_2 + \alpha N_1N_2$	1925

6. الحرارة

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1701	$\frac{\partial u}{\partial t} = -h(u - u_0)$	إسحاق نيوتن	قانون نيوتن للتبريد
1769	$Q = mc\Delta T$	جيمس وات	معادلة سعة انتقال الحرارة في جسم مادي
1822	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha.\nabla^2 u$	فورييه	معادلة انتشار الحرارة في الجسم
1822	$\frac{\partial T}{\partial t} = -k\,\nabla^2 T$	فورييه	معادلة التبريد
1822	$Q = m.c.\Delta T$ (حرارة محسوسة) $Q = m.L$ (تغيير الحالة)	فورييه	معادلات انتقال الحرارة
1822	$W = \Delta U + Q$	فورييه	القانون الأول للديناميكا الحرارية
1822	$m.C\,.\frac{dT}{dt} = Q(t) - \lambda.A.(T - T_0)$	فورييه	القانون الثاني للديناميكا الحرارية
1822	$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$	فورييه	معادلة انتشار الضوء
1842	$dU = \delta Q - \delta W$	جوليو روبرت ماير	معادلة الحرارة الداخلية
1850	$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$	رودولف كلاوزيوس	معادلة الزيادة في الانتروبيا
1864	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\nabla^2 u$	ماكسويل	معادلة الحرارة
1867	$\delta Q = mc\delta T + \left(\frac{5}{2}\right)R\delta T$	جيمس كليرك	ماكسويل معادلة الحرارة الناتجة عن التمدد الحجمي
1872	$\frac{dS}{dt} = \frac{\delta Q}{T} + \sigma$	ليونارد بولتزمان	معادلة الانتروبيا العامة
1873	$dS = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T}$	يوجين لارمور	معادلة انتروبيا متعددة الحدود
1877	$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\delta Q_{rev}}{T}$	لودفيغ بولتزمان	معادلة معدل الانتروبيا الشرطية
1879	$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$	يوجين ويغنر	معادلة غيبس للتغير في الطاقة الحرة
1897	$\Delta S = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T}$	ماكس بلانك	معادلة انتروبيا في العمليات غير المتوازنة
1900	$dQ = TdS$	هيرمان فون هيلم هولتز	معادلة انتقال الحرارة
1905	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\ \nabla^2 u + Q$	هاينريش هيرتز	معادلة الانتشار الحراري
1935	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\ \nabla^2 u + Q - h(u - u_0)$	لارس أونساغر	معادلة الانتشار الحراري مع الاضمحلال
1948	$\frac{d(\ln(K))}{dT} = \frac{\Delta H}{RT^2}$	فانت هوف	معادلة تجانب تغيير ثابت التوازن بالحرارة
1948	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\ \nabla^2 u + Q - h(u - u_0) + F(u)$	إيليا بريغوجين	معادلة الانتشار الحراري مع الاضمحلال والنمو غير الخطي
1958	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\ \nabla^2 u + Q - h(u - u_0) + F(u) + G(u, \Delta u)$	إيليا بريغوجين	معادلة الانتشار الحراري مع الاضمحلال والنمو غير الخطي والتفاعلات غير المحلية

7. **الإقتصاد**

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1809	$P(x) = \frac{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	كارل فريدريش غاوس	التوزيعات الاحتمالية
1756	$PMT = \frac{PV \times r}{1-(1+r)^{-n}}$	جايمس دودسن	(PMT) قيمة دفعة دورية
1827	$FV = PV(1+r)^n$	بلانو	(FV) قيمة المستقبل
1870	$NPV = \sum_{t=0}^{n}\frac{CF_t}{(1+r)^t}$	إيرنست فراش	(NPV) القيمة المالية الصافية
1879	$Y = C + I + G + (X - M)$	جون بابتيست ساي	GDP معادلة الإنتاج الإجمالي
1913	$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$	بريزنت	(PV) قيمة الحاضر
1930	$r = \frac{1+i}{1+\pi_e} - 1$	إيرفينج فيشر	معادلة فيشر الموسعة لحساب سعر الفائدة الحقيقي
1950	$pi_i(s) \geq \pi_i(s_{i'}, s_{-i}) \quad \forall i, s_{i'} \in S_i$	جون ناتش	معادلة توازن اللاعبين الرئيسيين
1964	$E(R_i) = R_f + \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f)$	ويليام شارب	(CAPM) متوسط العائد المتوقع
1997	$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$ $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \lambda(S\frac{\partial V}{\partial S} - V) - \lambda r V = 0$	بلاك شولز مرتون	معادلات التسعير الجزئي لخيارات الشراء

8. **البرمجة**

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1936	$M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$	ألان تورنغ	معادلة آلة تورنغ
1936	$T(M) = P(H(M) = H(I))$	ألان تورنغ	معادلة اختبار تورنغ
1947	$max(z) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$	جورج دانتزيغ	معادلة البرمجة الخطية
1947	$min(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$	جورج دانتزيغ	معادلة النقل
1947	$max(f(x)) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$	جون فون نويمان	معادلة البرمجة العددية غير الخطية
1957	$L = \lambda W$	ألان نيويل	معادلة الصفوف الانتظارية

9. **المعلومات**

السنة	الصيغة	العالم	التسمية
1927	$H(X) = log_2 \frac{1}{p(x)}$	رالف هارتلي	أنتروبيا هارتلي
1948	$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$	شانون	معادلة شانون
1948	$H(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot log_2(p(x_i \mid y_j))$	شانون	أنتروبيا مشروطة
1948	$I(X;Y) = H(X \mid Y) - H(X) - H(Y)$	شانون	المعلومات المتبادلة
1948	$H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X)$	شانون	معادلة شانون – هارتلي أنتروبيا مشتركة
1957	$H(X \mid Y) = H(X) - I(X;Y)$	روبرت فانو	أنتروبيا مشروطة مبسطة
1962	$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$	شانون	سعة القناة
1974	$K(X,Y) = \inf_{\phi,\psi} E[d(X,\phi(Y)) + d(Y,\psi(X))]$	أندريه كولموغوروف	تعقيد كولموغوروف
1991	$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot log_2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) \cdot p(y_j)}$	توماس كوفر	المعلومات المتبادلة ككسر
2003	$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot log_2 \frac{p(x_i \mid y_j)}{p(x_i)}$	ديفيد ماكاي	المعلومات المتبادلة كاحتمال
2011	$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot log_2 \frac{1}{p(x_i)}$	كريستوفر م. بيدرسن	أنتروبيا معكوس الاحتمال
2020	$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) log \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right)$	جودفلو إيان	المعلومات المتبادلة كاختلاف الاحتمالات

1.3 تطبيقات الرياضيات في علم الفيزياء

1.3.1 علاقة الرياضيات بالفيزياء

العلاقة بين كل من الفيزياء والرياضيات تكمن حينما بدأ فيه علماء الفيزياء باستخدام القوانين الرياضية .

يهتم علم الفيزياء بدراسة بنية المواد الموجودة في الطبيعة والتفاعلات بين المكوّنات الأساسية للكون المرئي على المستوى العيني و المجهري، كما يدرس الفيزياء سلوك الأجسام تحت تأثير قوى معينة عليها.

الرياضيات هي لغة صياغة قوانين الطبيعة التجريبية. يتم تحديد جزء كبير من الرياضيات من خلال فهم العلاقات بين الكائنات وتعريفها، إذ تستخدم الرياضيات كأداة لتحليل المعادلات الفيزيائية وإيجاد نواتجها؛ لذا فإنّ الرياضيات أداة لوصف الفيزياء وتحليل مشكلاتها.

1.3.2 التطور التاريخي لترابط الفيزياء بالرياضيات

قدّم العالم يوهانس كيبلر اكتشافه لقوانين مدارات الكواكب عام 1609 م وحساب طولها بالرياضيات، وتلاه إسحاق نيوتن في قوانين الجاذبية عام 1687 م التي استند فيها إلى التفاضل والتكامل.

بدأت قوانين الكهرومغناطيسية بالظهور عن طريق العالم جيمس كلارك ماكسويل وقد طورها باستعانته بعلم الرياضيات في العام 1865 م.

بدأت العلاقة بين الفيزياء والرياضيات بالتطور في ستينات وسبعينيات القرن العشرين ، عندما بدأ التوسع في دراسة الثقوب السوداء من قبل العالمين الفيزيائيين ستيفن هوكينغ و روجر بنروز. بتطوير نظريات الأوتار الفائقة في الثمانينيات.

1.3.3 أمثلة عن أهم النظريات الفيزيائية الكبري التي استعملت فيها الرياضيات

1. النظرية النسّبية

استخدم العالم الفيزيائي آينشتاين هندسة ريمان في وصف الفراغات المنحنية؛ إذ تؤكد النظرية النسّبية العامة على أن الأجسام المُتصفة بالضخامة تتقوس في الفراغ.

كانت الرياضيات المستعملة في نظرية النسبية تقتصر على الهندسة التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية، ونظرية الاحتمالات المستعملة في الميكانيكا الإحصائي.

2. ميكانيكا الكم

تتطلب ميكانيكا الكم إدخال النظرية الفيزيائية لمجال واسع من الرياضيات البحتة، المجال الكامل المرتبط بالضرب غير التبادلي.

تشرح نظرية الكم العلاقة بين الجسيمات والطاقة الكامنة في المجال الكمي المحيط بها.

أهم ما يميز الصياغة الرياضية لميكانيكا الكم عن الصياغات الرياضية للنظريات السابقة لها هو اعتمادها على بنى رياضية مجردة، مثل فراغ هلبرت والمؤثرات المعرفة فيه. باختصار فإن الكميات الفيزيائية مثل الطاقة لم تعد تعتبر دوالا رياضية ، لكن مؤثرات على هذه الدوال.

3. نظرية الأوتار

تعد نظرية الأوتار ثورة جديدة في علم الفيزياء الحديث، وهي نظرية تشرح العلاقة بين فيزياء الجسيمات المختلفة مع الجاذبية، والتي تقوم على مبدأ أنّ اللبنات الأساسية المكوّنة للطبيعة عبارة عن أوتار صغيرة أحادية البعد بسمك صفري،

وتوحد هذه النظرية المفاهيم الأساسية للفيزياء وتدمج بينها. وباستخدام التناظر والأبعاد الإضافية الرياضية يُمكن للعلماء التوصل إلى نظرية الأوتار بصورتها الكاملة.

1.4 تطبيقات الرياضيات في علم الأحياء

1.4.1 أهمية استخدام الرياضيات في علوم الأحياء

إن تطبيق الرياضيات على علم الأحياء له تاريخ طويل، ولكن في الآونة الأخيرة كان هناك اهتمام كبير في هذا المجال.

بعض أسباب ذلك الاهتمام:

- ثورة البيانات الغنية في مجموعات المعلومات والتي تُرجع إلى ثورة الأصول وهذه البيانات يصعب فهمها من دون استخدام أدوات التحليل.
- التطور الأخير للأدوات الرياضية، مثل نظرية الفوضى للمساعدة في فهم الآليات المعقدة غير الخطية في علم الأحياء.
- زيادة في القدرة الحاسوبية التي تؤمن إنجاز الحسابات وعمليات المحاكاة والتي لم تكن ممكنة في السابق.
- تزايد الاهتمام بالعمليات المنجزة بواسطة الحاسوب.

1.4.2 أمثلة عن استخدام النماذج الرياضية في علوم الأحياء

1. النمو ألأسي، كيف تتزايد التجمعات السكانية؟

يهتم علماء علوم الأحياء دوماً بمعرفة كيفية سيتزايد أو يتناقص عدد الفيروسات ضمن بيئةٍ معينة ووفق شروطٍ معينة.

عند دراسة مثل هكذا تجمعات سكانية يتم عادةً اللجوء لمعادلةٍ رياضية بسيطة هي النمو ألأسي Exponential Growth، وشكلها العمليّ وهو النمو اللوجستي Logistic Growth. تعبر كلا المعادلتين عن الكيفية التي سيتزايد بها عدد أفراد تجمعٍ

سكانيّ، والفرق بينهما هو أن النمو ألأسي يستمر إلا ما لا نهاية بينما يصف النمو اللوجستيّ تزايد عدد السكان حتى الوصول لقيمةٍ أو مرحلة لن يتزايد بعدها التعداد السكاني، وهي القيمة التي تُعرف بالإحصاء باسم سعة التحمل.

النمو اللوجستي هو التمثيل الأكثر واقعية لكيفية انتشار التجمعات السكانية كونه يأخذ بعين الاعتبار العوامل البيئية والتنافس على المصادر المتاحة والعوامل المضادة التي ستؤثر على معدل النمو وتجعله يتناقص. يمكن استخدام معادلة رياضية بسيطة لحساب النمو اللوجستي:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(\frac{K - N}{K}\right)} \qquad (4.1)$$

يُمثل الرمز K في المعادلة السابقة سعة الحمل، بينما يمثل الرمز N العدد الأولي للتجمع السكاني ويُمثل الرمز r معدل النمو، وأخيراً يمثل الحد $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ معدل الزيادة الحاصلة على عدد أفراد التجمع السكانيّ.

2. فيروس كورونا والنمو ألأسي:

منذ بداية انتشار الفيروس في جميع أنحاء الكوكب، أصبح هنالك كمية جيدة من البيانات التي يمكن استخدامها من أجل فهم سلوك الفيروس وكيفية انتشاره، ولو قمنا بتمثيل عدد الحالات المصابة بالفيروس فإنه سنجد أن هنالك نمط نمو أسيّ .

كان هنالك تزايد بطيء بعدد الإصابات ومن ثم أصبح الإصابات بتزايدٍ أسيّ كبير، وهكذا فإنه يمكن استخدام معادلة النمو ألأسي لفهم كيفية انتشار فيروس كورونا، وكذلك من أجل فهم عدد الإصابات المحتمل عند يومٍ محدد. لو عدنا لمعادلة النمو ألأسي فإن ما يهمنا معرفته هو معدل النمو الخاص بالفيروس وما هي العوامل المرتبطة مثل المعدل الوسطي للأشخاص الذين سيقابلهم شخص مصاب بالفيروس في كل يوم ولنسمي هذا العامل الرمز E، واحتمالية أن يؤدي كل تعرّض لحدوث إصابة، ولنسمي هذا العامل بالرمز p وبالتالي ومن أجل توقع عدد الأشخاص المصابين بفيروس كورونا بيوم ما، يمكننا استخدام معادلة النمو ألأسي كما يلي:

$$\boxed{N_d = \left(1 + E.p\right)^d N_0} \qquad (5.1)$$

يمثل الرمز N_d عدد الأشخاص المصابين بفيروس كورونا في اليوم d، ويمثّل الرمز N_0 عدد الأشخاص المصابين بالفيروس عند بدء التوقع، يمثل الجداء E.p معدل النمو الحقيقي الخاصة بالفيروس.

1.5 استخدامات الرياضيات في علوم الكمبيوتر

1.5.1 أهمية الرياضيات في علوم الكمبيوتر

- لم يبدأ تشغيل أجهزة الكمبيوتر إلا بعد التقدم في الرياضيات، فهو الركيزة التي يبنى عليها علم الحاسوب، لأن الأساس الحسابي لأجهزة الكمبيوتر هو المنطق والذي يعتبر أساس الرياضيات.
- فيحتاج كل مبرمج وعالم حاسوب إلى معرفة لا بدّ منها في الرياضيات ويعتمد نوع ومستوى الرياضيات التي يحتاجها على المجال الذي سيعمل فيه.
- الفهم الجيد لمفاهيم الرياضيات يساعد الطلاب على فهم أجهزة الكمبيوتر ويمكّنهم بسهولة من فهم كيفية عمل وحدات التحكم المنطقية، وكيفية كتابة خوارزميات أفضل، وكيفية عمل التشفير.

1.5.2 أهم فروع الرياضيات التي تستعمل في علوم الكمبيوتر

1. نظرية الأعداد

والتي تسمى أحيانا بعلم الحساب المتقدم، تستخدم في امن المعلومات و التشفير للحفاظ على سرية المراسلات و البيانات.

2. الإحصاء

يسمح لبرامج الحاسوب بتقديم تعميمات وتوقعات دقيقة بناءً على المعلومات المتاحة. كما أصبح جانبًا مهمًا من الحوسبة العلمية في مجالات عديدة منها تعلم الآلة "الذكاء الاصطناعي".

3. التحليل الرياضي

يستخدم في مجموعة من مجالات علم الحاسوب، بما في ذلك إنشاء الرسوم البيانية والمحاكاة والترميز والتشفير في التطبيقات وإنشاء الحلول الإحصائية وتصميم الخوارزميات وتحليلها.

1.5.3 أهم تطبيقات الرياضيات في علوم الكمبيوتر

1. لغات البرمجة

- يتم تدريس معظم مفاهيم الرياضيات من خلال لغة مجردة. من ناحية أخرى ، فإن أحد الأشياء التي يتم تناولها في علوم الكمبيوتر هو دراسة لغات البرمجة.
- معظم هذه اللغات هي أيضا مجردة وتتميز ببناء العمليات المحددة بشكل جيد ، والرموز ، والكلمات المفردة ، وحتى الصور المرئية.

2. إنشاء الخوارزميات

- المعرفة العميقة حول الخوارزميات ، والحوسبة ، والتعقيد يحتاج الي تطبيق الجبر و المنطق.
- تحسين عمل الخوارزميات خاصة في خلق وظائف التحكم عند البرمجة يحتاج إلي الرياضيات المتقطعة.

التشفير و حماية المعلومات.

- علم التشفير الحديث يستخدم الرياضيات (الخوارزميات، اللوغريتمات المعقدة، ...) للتشفير وفك تشفير البيانات. التشفير يُمكّنُك من تخزين المعلومات الحساسة أو نقلها عبر الشبكات غير الآمنة- مثل الإنترنت- وعليه لا يمكن قراءتها من قبل أي شخص ما عدا الشخص المرسل لـه.
- تستند خوارزميات التشفير الحديثة بشكل كبير إلى النظريات الرياضية، ويتم تصميم خوارزميات التشفير استنادا إلى فرضيات صعوبة الحساب فرض صعوبة الحساب، مما يجعل من الصعب كسر مثل هذه الخوارزميات عملياً.

3. تحليل البيانات الضخمة و المعقدة

- البيانات التي تكون من الضخامة بحيث تستحيل معالجتها وفرزها بالوسائل المتاحة نضطر إلي مجال علم الحاسوب والإحصاء الرياضي لتحليلها.
- توفير أدوات أساسية للتطور التكنولوجي الذي نلحظه يومياً ليس متاحا إلا باستعمال الرياضيات في كل ما نقوّمه من عينات ونماذج لظواهر طبيعية وغيرها، وكذا في دراستها وتحليلها، ولاسيما إذا ما حاكيناها عبر الحواسيب.

4. التعليم الآلي و التعليم العميق

- الكثير من المعادلات والصيغ الرياضية تستخدم لتصميم برامج التحكم في السيارات ذاتية القيادة.
- حاجة لاستخدام المعرفة الرياضيات لحل مشاكل الحياة الحقيقية من خلال جهاز كمبيوتر.
- الذكاء الاصطناعي يعتمد اعتماد أساسي علي تعلم الآلة و تعليمها التحليل و اتخذ القرار و كل هذا يستند إلى الاستعمال الكبير للمنطق الرياضي و التجريد الكبير للنظريات الرياضية.

2 الفصل الثاني: تطبيقات المعادلات التفاضلية

2.1 طرق حلول المعادلات التفاضلية الخطية

2.1.1 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بدون طرف

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بدون طرف يمكن تقديمها باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (6.1)$$

حيث $P(x)$ هي دالة معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام المعامل التكاملي التالي: $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx} \qquad (7.1)$$

حيث C هو ثابت التكامل.

2.1.2 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بطرف

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 1 بطرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (8.1)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام العامل التكاملي التالي: $e^{\int P(x)\,dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C\right) \qquad (9.1)$$

حيث C هو ثابت التكامل.

2.1.3 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بدون طرف (متجانسة)

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة 2 بدون طرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (10.1)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام للمعادلة (10.1)، يمكن استخدام العامل التكاملي التالي: $e^{\int P(x)\,dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C_1\right) + C_2 \qquad (11.1)$$

حيث C_1 و C_2 هما ثوابت التكامل.

2.1.4 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات متغيرة

حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطرف يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \qquad (12.1)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ دوال معروفة.

لحساب الحل العام لهذه المعادلة، يمكن استخدام العامل التكاملي التالي: $e^{\int P(x)\,dx}$

لذا، الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx}\left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + R(x)\right)dx + C_1\right) + C_2 \qquad (13.1)$$

حيث C_1 و C_2 هما ثوابت التكامل.

2.1.5 حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

حلول المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة يمكن تمثيلها باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \qquad (14.1)$$

حيث a و b هي معاملات ثابتة و $f(x)$ دالة معروفة.

- لحساب الحل العام $y_g = y_p + y_h$ للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (14.1)، يجب حساب الحل الخاص y_p والحل المتجانس y_h ، للمعادلة التفاضلية المتجانسة (15.1) التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \qquad (15.1)$$

لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة (15.1) يمكن استخدام العامل التكاملي e^{rx} للحصول على المعادلة الجبرية التالية:

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (16.1)$$

- <u>حالة وجود جذرين حقيقيين مختلفيين:</u>

$$y_h(x) = e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)x}c_1 + e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)x}c_2 \qquad (17.1)$$

- <u>حالة وجود جذرين حقيقيين متطابقين (جذر مضاعف):</u>

$$y_h(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 + c_2x) \qquad (18.1)$$

- <u>حالة وجود جذرين مركبين مترافقين :</u>

$$y_h(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,x\right)\right) \qquad (19.1)$$

الظواهر العلمية	الحل الخاص: y_p	المعادلة
تسخين أو تبريد مادة ما	$\dfrac{n!}{(b)^{n+1}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\dfrac{b^k}{k!}x^k$	$\dfrac{dy}{dx}-by=x^n$
النمو الشعاعي أو الانحسار	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha-b}$	$\dfrac{dy}{dx}-by=e^{\alpha x}$
حركة متذبذبة، مثل النبضات الصوتية أو الضوئية	$-\dfrac{\beta\left(\cos(\beta x)\right)+b\left(\sin(\beta x)\right)}{b^2+\beta^2}$	$\dfrac{dy}{dx}-by=\sin(\beta x)$
ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو	$\dfrac{(\alpha-b)\sin(\beta x)-\beta\left(\cos(\beta x)\right)}{(\alpha-b)^2+\beta^2}e^{\alpha x}$	$\dfrac{dy}{dx}-by=e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
حركة متذبذبة، مثل النبضات الصوتية أو الضوئية	$\dfrac{\beta\left(\sin(\beta x)\right)-b\left(\cos(\beta x)\right)}{b^2+\beta^2}$	$\dfrac{dy}{dx}-by=\cos(\beta x)$
ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو	$\dfrac{(\alpha-b)\left(\cos(\beta x)\right)+\beta\sin(\beta x)}{(\alpha-b)^2+\beta^2}e^{\alpha x}$	$\dfrac{dy}{dx}-by=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
تسخين أو تبريد مادة ما مع تأثير الطاقة الحركية	$\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=x^n$
ظواهر تتضمن تسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل الطاقة الحركية	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+a\alpha+b}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=e^{\alpha x}$
ظواهر متذبذبة مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي	$\dfrac{\left(b-\beta^2\right)\left(\sin(\beta x)\right)-(a\beta)\left(\cos(\beta x)\right)}{\left(b-\beta^2\right)^2+a^2\beta^2}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=\sin(\beta x)$
ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي	$\dfrac{\left(b+\alpha^2-\beta^2+a\alpha\right)\left(\sin(\beta x)\right)-\beta(a+2\alpha)\left(\cos(\beta x)\right)}{\left(b+\alpha^2-\beta^2+a\alpha\right)^2+\beta^2(a+2\alpha)^2}e^{\alpha x}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
ظواهر متذبذبة مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي	$\dfrac{\left(b-\beta^2\right)\left(\cos(\beta x)\right)+a\beta\left(\sin(\beta x)\right)}{\left(b-\beta^2\right)^2+a^2\beta^2}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=\cos(\beta x)$
ظواهر تتضمن تأثيرات متزامنة مع الزمن وتسارع النمو مع تأثيرات إضافية مثل التوازن الديناميكي	$\dfrac{\left(b+\alpha^2-\beta^2+a\alpha\right)\left(\cos(\beta x)\right)+\beta(a+2\alpha)\left(\sin(\beta x)\right)}{\left(b+\alpha^2-\beta^2+a\alpha\right)^2+\beta^2(a+2\alpha)^2}e^{\alpha x}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x)\right)+c$$

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x)\right)+c$$

نوع المعادلة التفاضلية	صيغة المعادلة	الحل	الظواهر العلمية
من الرتبة الأولى بدون طرف	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-f\left(x\right)=0$	$y\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx$	تفاعلات كيميائية بسيطة
من الرتبة الأولى بطرف	$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$	استخدام طرق التكامل العددي	حركة الجسم الذي يتأثر بقوة معينة
خطية من الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx}+p\left(x\right)y=q(x)$	$y=\mu(x)\int\frac{q(x)}{\mu(x)}dx+C$ $\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right]=\mu(x)q(x)$	حركة الجسم ، عمليات الاضمحلال، الدوائر الكهربائية
منفصلة المتغيرات	$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$	$\int f(x)dx=\int g(y)dy+C$	نمو السكان، مسائل الخلط
من الرتبة الثانية بدون طرف	$\frac{d^2y}{dx^2}+p\left(x\right)\frac{dy}{dx}+q\left(x\right)y=0$	استخدام طرق التكامل والتحليل الجبري	حركة المواد في السوائل والغازات
من الرتبة الثانية بطرف	$\frac{d^2y}{dx^2}+p\left(x\right)\frac{dy}{dx}+q\left(x\right)y=r\left(x\right)$	تطبيق أساليب التحليل الجبري المتقدمة	الاهتزازات الميكانيكية
من الرتبة الثانية بطرف، ذات معاملات ثابتة	$y''+ay'+by=c$	$y=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}+\frac{c}{b},\ \Delta=a^2-4b>0$ $y=(A+Bt)e^{rt}+\frac{c}{b},\ \Delta=0$ $y=e^{pt}(A\cos(qt)+B\sin(qt))+\frac{c}{b},\ \Delta<0$	التحليل الاهتزازي الحركة التوافقية البسيطة الديناميكا الحرارية
معادلة تفاضلية غير خطية	$y''+f\left(y'\right)+g\left(y\right)=0$	حل تحليلي غير ممكن، يتطلب طرق عددية	الظواهر المتقطعة الديناميكا الكمية

2.2 تطبيقات المعادلات التفاضلية في الظوهر الديناميكية

2.2.1 الديناميكا السكانية الإيكولوجية (علم البيئة)

تُستخدم المعادلات التفاضلية لوصف تغير عدد السكان في مجموعات بيولوجية مثل الفراشات أو السمك أو الطيور عبر الزمن، مما يسمح بتحليل تفاعلات الكائنات الحية مع بيئتها وتأثيرها على توزيعها وتنوعها البيولوجي وتوقع تطورها.

الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
معادلة النمو الأساسي (نمو سكاني بدون قيود)	$\frac{dN}{dt} = rN$
معادلة النمو اللوجستي (نمو سكاني مع قدرة استيعابية، المنافسة البسيطة بين السكان)	$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$
معادلة التفاعل بين مجتمعين مختلفين	$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1}) - \beta N_1 N_2$
معادلة نمو السكان بنمو لوجاريثمي	$\frac{dN}{dt} = rN\log(\frac{K}{N})$
معادلة نمو السكان مع الحسابات الديناميكية	$\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K - N}{K}\right)^{\frac{3}{2}}$
معادلة النمو اللوجستي العامة	$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)^{n}$
معادلة النمو مع التفاعل بين الفريسة والمفترس	$\frac{dN}{dt} = rN - aNP$

2.2.2 الديناميكا الكيميائية

تُستخدم المعادلات التفاضلية لوصف سرعة التفاعلات الكيميائية وتغير تركيز المواد الكيميائية عبر الزمن، مما يساعد في فهم تفاعلات الكيمياء الحيوية والكيمياء الصناعية.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$	قانون التفاعل الأولي لتفاعل من الدرجة الأولى
$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$	قانون التفاعل الأولي لتفاعل من الدرجة الثانية
$\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$	تفاعل كيميائي بين مركبين
$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^m[B]^n$	تفاعل كيميائي متعدد المكونات
$\frac{d[A]}{dt} = k_1[A] - k_2[A]^2$	تفاعل معادل
$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^{\frac{1}{2}}$	تفاعل كيميائي معادل
$\frac{dO_3}{dt} = k_1 O_2 + k_2 O \cdot O_3$	معادلة تغير الأوزون
$\frac{dCO_2}{dt} = P - R$	معادلة تغير مستوى ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجوي

2.2.3 الديناميكا الفيزيائية

تُستخدم المعادلات التفاضلية في الفيزياء لوصف حركة الجسيمات والتغيرات في الطاقة والمتغيرات الفيزيائية الأخرى عبر الزمن.

الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
الحركة الانتقالية السريعة بثابت السرعة a	$\frac{dv}{dt} = a$
الحركة الانتقالية بسرعة ثابتة v	$\frac{dx}{dt} = v$
حركة متسارعة بمعدل ثابت a	$\frac{d^2x}{dt^2} = a$
حركة مرنة بمعدل ترددي ω	$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$
حركة كتلة ثابتة مع مقاومة الهواء	$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$
نظام اهتزازي بسيط (نواس معلق)	$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin(\theta)$

2.2.4 الديناميكا الاقتصادية

تُستخدم المعادلات التفاضلية في الاقتصاد لوصف تغيرات مؤشرات الاقتصاد مثل الإنتاج الوطني الإجمالي والتضخم والبطالة.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dS}{dt} = I - C$	معادلة التوفير والاستهلاك
$\frac{dI}{dt} = G - T$	معادلة الاستثمار والضرائب
$\frac{dY}{dt} = C + I + G + (X - M)$	معادلة الناتج الوطني
$\frac{dL}{dt} = P - w$	معادلة العرض والطلب على العمل
$\frac{dP}{dt} = \alpha P$	معادلة التضخم
$\frac{dC}{dt} = \beta C$	معادلة التوفير

2.2.5 الديناميكا الحرارية (تغير طاقة وحركة الأجسام)

تُستخدم المعادلات التفاضلية في دراسة توزيع درجة الحرارة وتغيراتها في الأجسام والأنظمة الحرارية.

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dQ}{dt} = kA\,\frac{\Delta T}{d}$	معادلة انتقال الحرارة
$\frac{dS}{dt} = \frac{kA}{d}(T_H - T_C)$	معادلة زيادة الانحراف الانتروبي
$\frac{dU}{dt} = -\frac{kA}{d}(T_H - T_C)$	معادلة انخفاض الطاقة الداخلية

2.2.6 الديناميكا الكهربائية

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\sum V = 0$	قانون كيرشوف للدوائر الكهربائية
$V = I \times R$	قانون الفروق الجزئية
$I = C\,\frac{dV}{dt}$	معادلة التوصيل الكهربائي للمكثفات
$V = L\,\frac{dI}{dt}$	معادلة التوصيل الكهربائي للملفات
$\frac{dQ}{dt} = I$	علاقة التيار والشحنة
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	قانون الفلكس للتيار الكهربائي
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	قانون فاراداي للتوليد المغناطيسي بالحقل الكهربائي

2.2.7 الديناميكا الحيوية

المعادلة التفاضلية	الظاهرة العلمية
$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$	معادلة نمو الأورام
$\frac{dN}{dt} = rN$	معادلة نمو السكان
$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$	معادلة تنظيم السكان
$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(k \cdot ln(\frac{N}{N_0}))$	معادلة زيادة الانحراف الانتروبي
$\frac{dH}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	معادلة حرارة الانتقال
$\frac{dE}{dt} = Food\ Intake - Metabolism$	معادلة التوازن الحراري

2.3 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

2.3.1 الظواهر العلمية الخاضعة للنمو ألأسي أو التضاؤل ألأسي

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(t\right)} \quad (20.1)$$

- $P\left(t\right)$ هي قيمة الدالة في وقت t.
- P_0 هي القيمة الابتدائية للدالة عند $t = 0$.
- e هو أساس اللوغاريتم الطبيعي (تقريباً 2.71828).
- k هو ثابت معدل النمو/التحلل.

بحيث:

- إذا كان $k > 0$، فإن الحل يمثل نموًا أسيًا.
- إذا كان $k < 0$، فإن الحل يمثل تحللًا أسيًا.
- إذا كان $k = 0$، فإن الدالة ثابتة: $P(t) = P_0$.

النمو ألأسي للعدد الحقيقي لسكان البشر لا يمكن الاستمرار فيه لأكثر من 10-20 عامًا بسبب استهلاك الموارد، تراكم النفايات، التنافس، وقيود المساحة فالنماذج النظرية التي تتجاهل مثل هذه الحدود تصبح غير واقعية.

الظاهرة العلمية	P(t)	k	P_0
نمو بكتيري	عدد البكتيريا	معدل نمو البكتيريا	عدد البكتيريا في البداية
نمو سكاني	عدد السكان	معدل النمو السكاني	عدد السكان في البداية
تفكك إشعاعي	عدد النظائر المشعة	ثابت التفكك	عدد النظائر المشعة في البداية
انتشار شائعة	عدد الأشخاص الذين يعرفون الشائعة	معدل انتشار الشائعة	عدد الأشخاص الذين يعرفون الشائعة في البداية
نمو خلية	حجم الخلية	معدل نمو الخلية	حجم الخلية في البداية

2.3.2 الظواهر العلمية الخاضعة للنموذج اللوجستي

نمو بشكل سريع في البداية، ثم يتباطأ معدل النمو تدريجيًا حتى يصل إلى سعة التحمل K

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)} \quad (21.1)$$

الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
نمو السكان	$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$
نمو البكتيريا	$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$
نمو الأورام	$\frac{dV}{dt} = rV\left(1 - \frac{V}{K}\right)$
انتشار التكنولوجيا	$\frac{d\left(ln\left(A\right)\right)}{dt} = k\left(1 - A\right)$
التعلم	$.\frac{dL}{dt} = k\left(L_f - L\right)$

dP/dt: هو معدل تغير عدد السكان P بالنسبة للزمن t.

r : هو معدل النمو الأقصى.

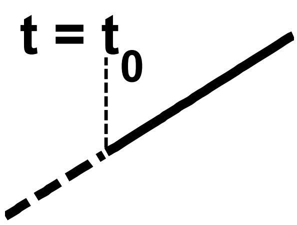
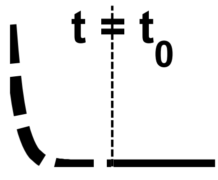
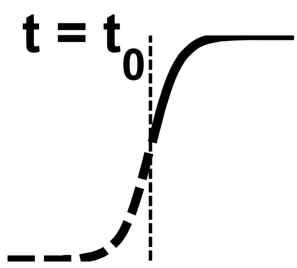
P: هو عدد السكان في الزمن t.

K: هي السعة الاستيعابية للبيئة.

العوامل المحددة	المدة القصوى للنمو ألأسي بدون قيود	الظاهرة العلمية
نفاد المواد الغذائية، تراكم النفايات	أيام 3-2	اضمحلال البكتيريا
التنافس على مصادر الطعام	أشهر 2-1	الحشرات / الآفات
قيود المساحة، الموارد الغذائية	سنوات 10-5	الحيوانات في بيئات جديدة
تجاهل الحدود الفيزيائية في العالم الحقيقي	غير محددة وغير واقعية	النماذج الرياضية النظرية
استهلاك الموارد، التنافس	من 1850 الى 1975 بنسبة اقل من 2 بالمائة في كل سنة	انحسار نمو السكان البشري
تناقص النوى المشعة	مليارات السنين	تحلل النظائر المشعة
درجات الحرارة، الحموضة، الإشعاع	ثواني إلى دقائق	تفكك الجزيئات الكيميائية

- **مثال توضيحي:**

العدد التقريبي لسكان العالم بالمليار	العام
0.31	1000
0.5	1500
1.0	1800
1.26	1850
1.43	1875
1.63	1900
1.93	1925
2.52	1950
4.07	1975
4.85	1985
5.75	1995
6.12	2000
6.54	2005
7.35	2015
7.83	2020
9.73	2050
10.9	2100

الخاصية	النمو أو التضاؤل الخطي	النمو أو التضاؤل ألأسي	النمو ثم التضاؤل اللوجستي
النمط	نمو بمعدل ثابت عبر الزمن	سريع	نمو سريع في البداية ثم يتباطأ تدريجياً
معدل النمو **dP/dt**	ثابت	يتناسب مع القيمة الحالية لعدد السكان	يتناسب مع عدد السكان ومع الفرق بين عدد السكان والقيمة القصوى له
الشكل الهندسي	خط مستقيم	خط منحني يزداد بشكل أسي	منحنى على شكل حرف S
القيمة القصوى لقيود الموارد والتنافس بين الأفراد	لا يوجد	لا يوجد	موجود
الظواهر العلمية	- تكلفة الخدمات - الإيرادات الثابتة - الاستهلاك الثابت للموارد - سرعة ثابتة لجسم متحرك - نمو الطول لدى الأطفال - العلاقة بين القوة والازاحة - التغير الحراري الخطي - العلاقة بين الضغط والحجم	- انحلال النظائر المشعة - تفكك الجزيئات الكيميائية - نمو الفائدة المركبة - انتشار الأشعة السينية	- نمو السكان والنباتات والمحاصيل - نمو بكتيريا - انتشار التكنولوجيا والابتكارات - نمو الأورام والخلايا السرطانية - انتشار الأوبئة والأمراض المعدية - نمو الشركات والأعمال التجارية - انتشار الشائعات والأخبار
الصيغة الرياضية	$P(t)=m.t+P(t_0)$	$P(t)=P(t_0)e^{r(t-t_0)}$	$P(t)=\frac{L}{\left(1+\frac{L-P_0}{P_0}\right)e^{-r(t-t_0)}}$
المعادلة التفاضلية	$\frac{dP}{dt}=m$ m : معدل النمو الثابت	$\frac{dP}{dt}=rP$ r : معدل النمو او التضاؤل ألأسي.	$\frac{dP}{dt}=rP\left(1-\frac{P}{L}\right)$ r: معدل نمو النمو اللوجستي. L : القيمة القصوى للنمو.
المنحنى البياني		 شكل حرف L	 شكل حرف S

2.3.3 معادلات النمو اللوجستي العامة

تعد معادلة النمو اللوجستي العامة نموذجًا لنمو السكان مع تعديل على معادلة النمو اللوجستي التقليدية.

بينما يستخدم النموذج التقليدي مربعًا لسعة التحمل يستخدم هذا النموذج سعة تحمل تؤثر على سلوك الحل.

المعادلة	اسم المعادلة
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$	النمو اللوجستي العام
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta P^2$	النمو اللوجستي مع معدل نمو متغير
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - aP^2$	النمو اللوجستي مع معدل نمو يعتمد على الكثافة
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - cPQ$	النمو اللوجستي مع تأثير العوامل البيئية
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - k\frac{dP}{dt}$	النمو اللوجستي مع تأخير في التأثير
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) + d$	المعادلة التفاضلية مع حد أدنى
$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{(P+d)}{K}\right)$	المعادلة التفاضلية مع انحراف
$\frac{dP}{dt} = r_1P\left(1 - \frac{P}{K_1}\right) + r_2P\left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \dots$	المعادلة التفاضلية متعددة المراحل
$\frac{dP}{dt} = -nrP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)\left(\frac{P(t)}{P_0} - 1\right)^n$	المعادلة التفاضلية للنمو اللوجستي مع تأثير الإنتاج

2.3.4 أمثلة

- <u>تفريغ المكثف في دارة كهرائية</u>

المعادلة التفاضلية	نوع التغير	الظاهرة العلمية	القانون (حل المعادلة التفاضلية)
$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$	خطي	تفريغ المكثف في دارة RC	$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{LC}Q$	خطي	تفريغ المكثف في دارةLC	$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$
$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{R}Q - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}$	غير خطي	تفريغ المكثف في دارة LRC	$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}\sin(\omega_d t + \phi)$

- **التفاعلات الكيميائية**

القانون (حل المعادلة التفاضلية)	الظاهرة العلمية	نوع التغير	المعادلة التفاضلية
$[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$	تفاعل انحلال من الدرجة الأولى	خطي	$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$
$\frac{1}{[A](t)} = \frac{1}{[A]_0} + kt$	تفاعل تكوين من الدرجة الثانية	غير خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$
$[A](t) = [A]_0 + k[B]_0 t$	تفاعل تكوين من المرحلة الأولى	خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[B]$
$v = k[A]^m [B]^n [C]^p ...$	تفاعل تكوين من الدرجة n	غير خطي	$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$

2.4 الظواهر العلمية الخاضعة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

الظاهرة العلمية	المعادلة التفاضلية
تسارع النمو السكاني بالنسبة لسرعته	$\frac{d^2N}{dt^2} = r\frac{dN}{dt}$
التأرجح الهرموني	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$
التذبذب الكهربائي	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$
الحركة الكهربائية	$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$
الاهتزاز الميكانيكي	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$

- **للمزيد من تطبيقات المعادلات التفاضلية يمكنكم تصفح المرجعين : [1] و [2]**

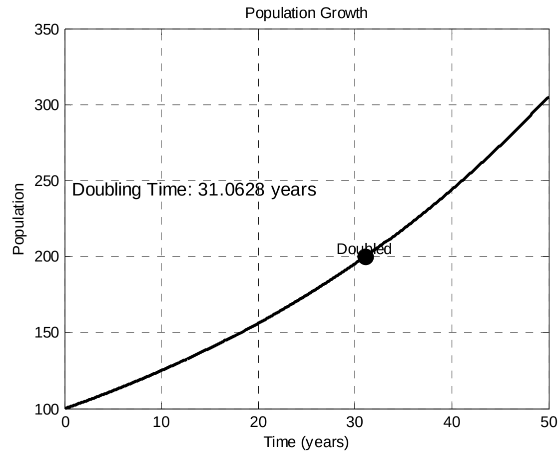
3 تمارين محلولة

- لمزيد من التمارين والتطبيقات في المعادلات التفاضلية، يمكنكم تصفح المرجع رقم [3]

Exercise 1

Population has increased to 25% in 10 yrs, how long will it take to become double?

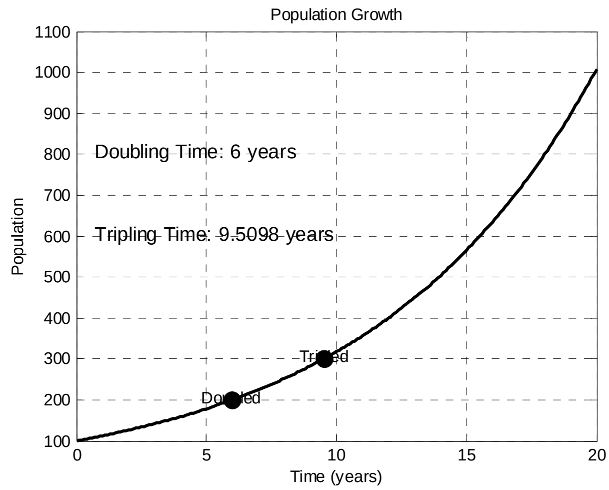
تزايد عدد السكان بنسبة 25 بالمائة في 10 سنوات، كم ينبغي من عدد السنوات ليصبح الضعف؟



Exercise 2

عدد سكان لمجتمع ما يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الأشخاص الموجودين في وقت محدد t.
إذا تضاعف عدد السكان في 6 سنوات ، فما المدة التي سيستغرقها ليصبح ثلاثة أضعاف؟

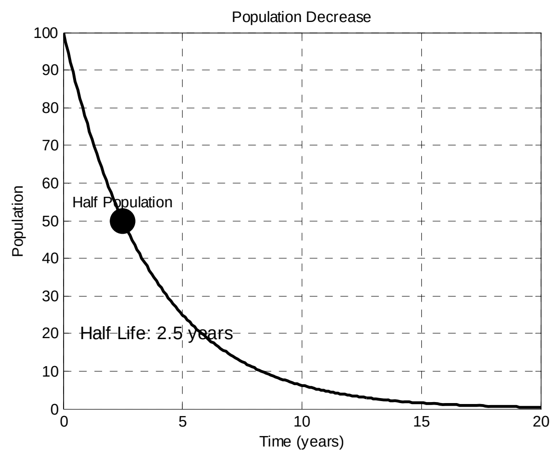
The population of a community is known to increase at a rate proportional to the number of people present at a time t. If the population has doubled in 6 years, how long it will take to triple?



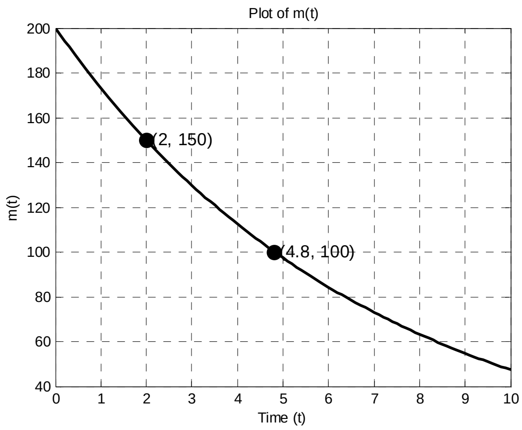
Exercise 3

لنفرض أن التغير الديمغرافي لبلد ما يتناقص بمعدل يتناسب مع عدد سكانه. إذا انخفض عدد السكان إلى 25٪ من العدد الأصلي بعد T سنة بحيث T<10، فكم من الوقت سيستغرق حتى يصل عدد السكان إلى نصف العدد الأصلي؟

Let population of country be decreasing at the rate proportional to its population.If the population has decreased to 25% in T Ys (T<10), how long will it take to be half?



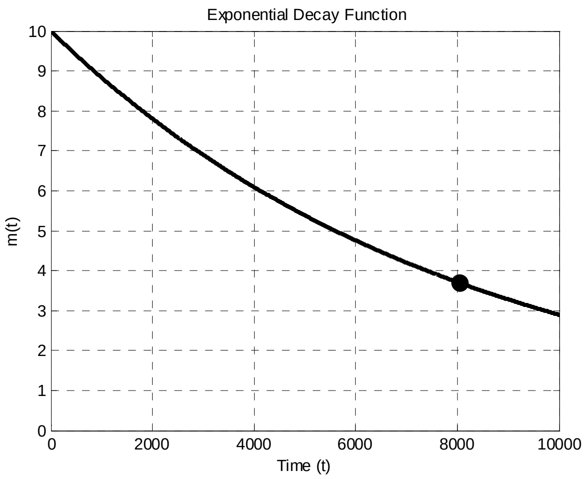
Exercise 4



A radioactive isotope has an initial mass 200 mg, which two years later is 150 mg.
Find the expression for the amount of the isotope remaining at any time.
What is its half-life?

يحتوي نظير مشع على كتلة أولية تبلغ 200 مللي جرام، وبعد عامين تصبح الكتلة 150 مللي جرام.
أ) اوجد المعادلة التي تمثل كمية النظير المتبقية في أي وقت.
ب) ما هو نصف-عمر النظير المشع (الوقت الذي يستغرقه النشاط الإشعاعي للنظير ليقل إلى نصف قيمته الأصلية).

Exercise 5



لنفترض أن لدينا قطعة أثرية، على سبيل المثال قطعة من الخشب المتحجر، وتظهر القياسات أن نسبة C^{14} إلى الكربون في العينة تبلغ 37٪ من النسبة الحالية. نفترض أن الخشب تحلل في الزمن 0.
احسب الزمن T الذي يستغرقه جرام واحد من الكربون المشع حتى يتحلل بهذا المقدار (نصف عمر C^{14} هو 5568 سنة ≈ 5600 سنة).

Suppose that we have an artifact, say a piece of fossilized wood, and measurements show that the ratio of C^{14} to carbon in the sample is 37% of the current ratio.
Assume that the wood died at time 0. Compute the time T it would take for one gram of the radio active carbon to decay this amount
(The Half-life of C^{14} is l = 5568 Ys ≈ 5600 Ys.

Exercise 6

(a) A fossilized bone is found to contain one thousandth the original amount of C^{14}.

Determine the age of fossil.

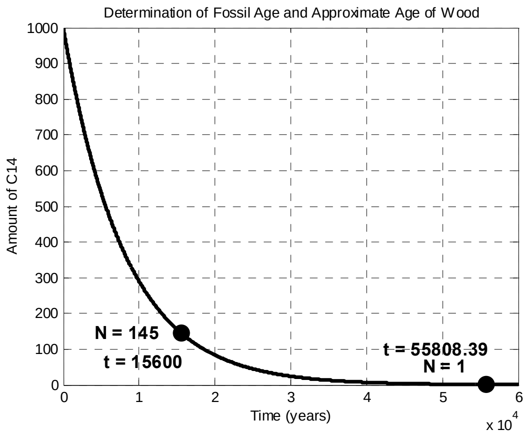
(b) Use the information provided in part (a) to determine the approximate age of a piece of wood found in an archaeological excavation at the site to date prehistoric paintings and drawing on the walls and ceilings of a cave in Lascaux, France, provided 85.5% of the C^{14} had decayed.

The Half-life of C^{14} is ≈ 5600 Ys

(أ) تم العثور على عظمة متحجرة تحتوي على واحد من ألف من الكمية الأصلية للكربون 14. حدد عمر الحفرية.

(ب) استخدم المعلومات الواردة في الجزء (أ) لتحديد العمر التقريبي لقطعة خشب تم العثور عليها في حفريات أثرية في نفس الموقع ، بحيث يكون 85.5٪ من الكربون 14 قد تحلل.

نعتبر أن نصف عمر الكربون 14 ≈ 5600 سنة



Exercise 7 :

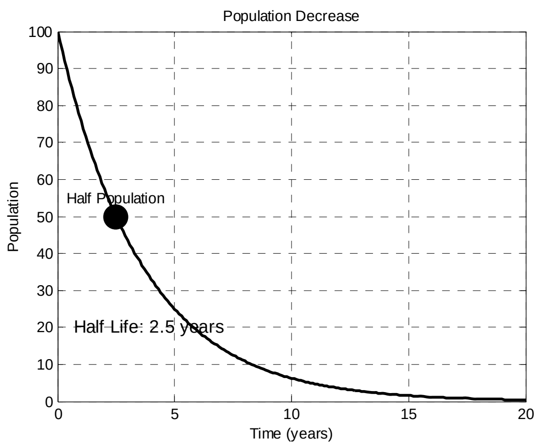
A tank contains 300 liters of fluid in which 20 grams of salt are dissolved.

Brine containing 1 gm of salt per liter is then pumped into the tank at a rate of 4 L/min; the well-mixed solution is pumped out at the same rate.

Find the number N(t) of grams of salt in the tank at time t.

يحتوي خزان سعة 300 L من سائل يتم إذابة 20 g من الملح فيه.

يتم ضخ محلول ملحي يحتوي على 1 g جرام من الملح لكل 1 L إلى داخل الخزان بمعدل 4 L/min ثم يتم ضخ المحلول المخلوط الناتج الى خارج الخزان بنفس المعدل. ماهي كمية الملح $N(t)$ في الخزان عند الزمن t ؟



Exercise 8 :

A 100-volt electromotive force is applied to an RC series circuit in which the resistance is 200 ohms and the capacitance is 10^{-4} farads

a) Find the charge q(t) on the capacitor if q (0)=0.

b) Find the current i(t).

يتم تطبيق قوة دافعة مقدارها E(t) = 100 volts على دارة كهربائية حيث المقاومة تساوي R=200 Ohms والسعة C=10^{-4} Farads

a) أوجد شحنة المكثف $q(t)$ إذا كانت القيمة الأولى للشحنة $q(0)$ تساوي 0.

b) أوجد التيار اللحظي $i(t)$ في الدارة.

Exercise 9:

Set an electrical circuit LCR. Find the charge q(t) on the capacitor, and the current i(t), for an time t, if the inductance L=1 Henry (H) , the Resistance R=300 ohms, the capacitance C=5.10^{-5} farads and at t=0 the switch is closed to a 40-volt battery.

Furthermore it is assumed that q(0) = i(0)= 10^{-7}

يتم توصيل دارة كهربائية LCR بالمعطيات التالية:

الوشيعة L=1 Henry

المقاومة R=300 ohms

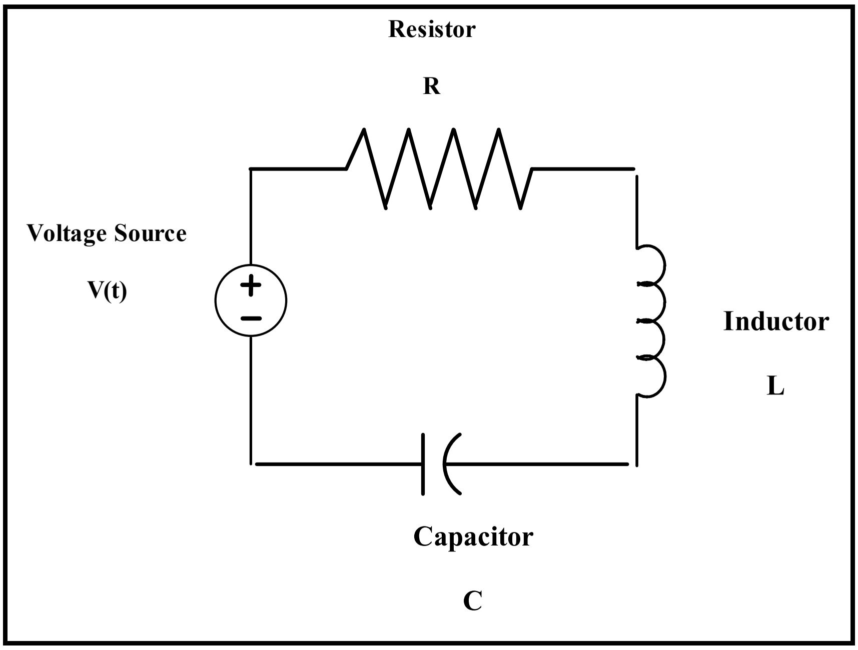
السعة C=5.10^{-5} farads

الشحنة الأولية للمكثف $q(0) = 10^{-7}$ *Coulombs*

التيار الكهربائي الأولي $i(0) = 10^{-7}$ *Amperes*

الجهد الكهربائي المؤثر $E = 40\,Volts$ (يُفترض بعد إغلاق المفتاح عند t = 0)

المطلوب: إيجاد شحنة المكثف $q(t)$ والتيار الكهربائي $i(t)$ بدلالة الزمن t



Solution Of Exercise 1 :

إذا فرضنا أن تغير دالة عدد السكان بالنسبة للزمن متناسبة مع هذه الدالة بنسبة ثابتة ولتكن k ، فإن:

$$\frac{dP}{dt} = kP,\ k > 0$$

بحل المعادلة التفاضلية السابقة نجد:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$\ln P = kt + C$$

لتكن القيمة الابتدائية لعدد السكان هي P_0. إذن عند $t = 0$ نجد :

$$\ln P_0 = 0 + C$$

$$C = \ln P_0$$

$$\ln P = kt + \ln P_0$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = kt$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

إذا كان $t = 10$ فإن

$$P(10) = P_0 e^{10k} = P_0 + \frac{P_0}{4} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)P_0 = \frac{5}{4}P_0$$

$$1.25P_0 = P_0 e^{10k}$$

$$e^{10k} = 1.25$$

$$k = \frac{\ln(1.25)}{10} \times 0.02$$

لنبحث عن الزمن t عندما يزداد عدد السكان مرتين $P = 2P_0$ نجد :

$$2P_0 = P_0 e^{kt}$$

$$2 = e^{kt}$$

$$t = \frac{\ln 2}{k} = 10\frac{\ln 2}{\ln(5/4)} \approx 31.0628 \text{ Ys}$$

فنستنتج أن المدة الزمنية اللازمة ليزداد عدد السكان مرتين هي حوالي 31 سنة.

$$\boxed{t_{2P_0} \approx 31.0628 \text{ Ys}}$$

Solution Of Exercise 2 :

لنعتبر $N(t)$ هو عدد السكان في الزمن t.

لنعتبر $N(0)$ هو السكان الأولي (عدد السكان في $t = 0$).

لدينا المعادلة التفاضلية حسب الشروط:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

أي $N(t) = Ae^{kt}$ ، حيث $A = N(0)$. فنستنتج قيمة الثابت k :

$$Ae^{6k} = N(6) = 2N(0) = 2A$$

$$e^{6k} = 2$$

$$k = \frac{1}{6}\ln 2$$

لنبحث عن الزمن t عندما يكون $N(t) = 3A = 3N(0)$

$$N(0)e^{kt} = 3N(0)$$

$$3 = e^{\frac{1}{6}(\ln 2)t}$$

$$\ln 3 = \frac{(\ln 2)t}{6}$$

$$\boxed{t_{3N(0)} = \frac{6\ln 3}{\ln 2} = 9.6\ Ys}$$

فنستنتج أن المدة الزمنية التي من خلالها يتزايد عدد السكان ثلاث مرات تزيد عن 9 سنوات.

Solution Of Exercise 3 :

بما أن عدد السنوات لا يتجاوز 10 سنوات فيمكن تمثيل تناقص عدد السكان باستعمال النموذج الأسي،

ومنه المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dN}{dt} = kN(t)$

التي حلها هو: $N(t) = N(0)e^{kt}$ بحيث $N(0)$ هو عدد السكان في البداية.

لنبحث عن الثابت k بحيث $k < 0$:

$$N(T) = N(0)e^{kT} = \frac{1}{4}N(0)$$

$$e^{kT} = \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{1}{T}\ln\frac{1}{4} = \frac{-2\ln 2}{T} < 0$$

فنستنتج أن الزمن اللازم $t_{1/2}$ لينقص نصف عدد السكان هو :

$$N(0)e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2}N(0)$$

ومنه :

$$e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$kt_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-2\ln 2 / T} = \frac{T}{2}$$

أي أن :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{T}{2}}$$

إذا كان مثلا $T = 5$ ، فإن نصف حياة تناقص عدد السكان هو 2.5 سنة.

Solution Of Exercise 4 :

لتكن m كتلة النظير المشع المتبقية بعد t سنة، وليكن k ثابت التناسب.

إذن معدل التحلل يكتب على الشكل :

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

فنستنتج أن :

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 200e^{kt}$$

ومنه :

$$m(2) = 200e^{2k} = 150$$

أي أن :

$$e^{2k} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$
$$2k = \ln\frac{3}{4}$$
$$k = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = -0.1438 < 0$$

إذن كتلة النظير المشع المتبقية بعد t سنة هي:

$$m(t) = 200e^{-0.1438\,t}$$

زمن نصف-حياة النظير المشعر t_h الموافق لـ m = 100 mg يحقق:

$$100 = 200\,e^{k\,t_{1/2}}$$

ومنه :

$$e^{k\,t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$
$$k\,t_{1/2} = \ln(0.5)$$
$$t_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\frac{1}{2}\ln(0.75)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.75)} \times 2 \approx 4.8188\ Ys$$

فنستنتج أن نصف حياة النظير المشع تقترب إلى خمس سنوات.

$$\boxed{t_{1/2} \approx 4.8188\ Ys}$$

Solution Of Exercise 5 :

لتكن $m(t)$ كتلة C^{14} النظير المشع لـ C^{12} المتبقية بعد t سنة، وليكن k ثابت التناسب.

إذن معدل التحلل يُكتب على الشكل:

$$\frac{dm}{dt} = km$$

$$m(t) = m(0)e^{kt} = M_0 e^{kt}$$

بحيث M_0 هي الكتلة الابتدائية قبل بداية تحلل C^{14}.

إذا حصلنا M_T غرام بعد زمن T، فإن:

$$m(T) = M_T = M_0 e^{kT}$$

$$\ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right) = kT$$

$$k = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right)$$

فنستنتج أن: $m(t) = M_0 e^{\frac{t}{T}\ln\left(\frac{M_T}{M_0}\right)}$

ليكن λ الزمن اللازم للإشعاع الكلي لنصف كتلة C^{14}، لدينا إذن :

$$M_\lambda = \frac{M_0}{2}$$

$$\frac{M_\lambda}{M_0} = \frac{1}{2}$$

$$m(t) = M_0 e^{\frac{\ln(1/2)}{\lambda}t} = M_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda}t}$$

بما أن $\frac{M_T}{M_0} = 37\% = 0.37$ ، فإن: $M_T = m(T) = M_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda}T}$

$$\frac{M_T}{M_0} = 0.37 = e^{\frac{\ln(0.5)}{\lambda}T}$$

$$\ln(0.37) = \frac{\ln(0.5)}{\lambda}T$$

$$T = \frac{\ln(0.37)}{\ln(0.5)}\lambda \approx \frac{\ln(0.37)}{\ln(0.5)} \times 5600 \approx 8032.64\ Ys$$

$$\boxed{T \approx 8032.64\ Ys}$$

Solution Of Exercise 6 :

(a) المعادلة التفاضلية الممثلة لـهذه الظاهرة العلمية تُكتب على الشكل:

$$\frac{dN}{dt} = k\,N(t)$$

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

بحيث k يمثل ثابت تناسب الاضمحلال.

إذا افترضنا أن نصف-حياة C^{14} هو بالتقريب $\lambda \approx 5600\ Ys$ ، فإن:

$$\frac{N_o}{2} = N(\lambda)$$ ،

ومنه:

$$N_0 = N_0 e^{\lambda k}$$

$$\lambda k = \ln\frac{1}{2} = \ln(0.5)$$

$$k = \frac{\ln(0.5)}{\lambda} = \frac{\ln(0.5)}{5600} = -0.00012378$$

بما أن : $\frac{N_t}{N_0} = \frac{1}{1000}$ ، فإن :

$$\frac{N_0 e^{kt}}{N_0} = \frac{1}{1000}$$

$$kt = 0.001$$

$$t_{fossil} = \frac{0.001}{k} = \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)}\lambda = \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)} \times 5600 = 55808.39\ \ Ys$$

(b) إذا كانت نسبة اضمحلال C^{14} هي 85.5% ، فإن :

$$\frac{N_t}{N_0} = 1 - \frac{85.5}{100} = \frac{100 - 85.5}{100} = \frac{14.5}{100} = 0.145$$

$$\frac{N_0 e^{kt}}{N_0} = 0.145$$

$$e^{kt} = 0.145$$

$$t_{wood} = \frac{\ln(0.145)}{k} = \frac{\ln(0.145)}{\ln(0.5)}\lambda = \frac{\ln(0.145)}{\ln(0.5)} \times 5600 = 15600\,Ys$$

$$\boxed{t_{fossil} = 55808.39\ \ Ys \ \text{ and } \ t_{wood} = 15600\,Ys}$$

Solution Exercise 7 :

لتكن N نسبة تغير الملح في الخزان بدلالة الزمن ، إذن:

$$N(0) = 20$$

يتم ضخ محلول ملحي يحتوي على 1 g من الملح لكل 1 L إلى داخل الخزان بمعدل 4 L/min

أي في كل دقيقة واحدة يتم ضخ داخل الخزان 4 غرام وفي نفس المدة الزمنية يتم إخراج 4 L من سعة 300 L أي ما يكافيء

بالغرام : $\frac{4}{300}N = \frac{N}{75}$ ، ومنه :

$$\frac{dN(t)}{dt} = 4 - \frac{N}{75}$$

فتتحصل على المعادلة التفاضلية الخطية الآتية :

$$\frac{dN(t)}{dt} + \frac{N}{75} = 4 \qquad (22.1)$$

التي يمكن حساب معامل تكاملها:

$$e^{\int \frac{1}{75}dt} = 75.e^{\frac{1}{75}t}$$

ومنه :

$$N(t).e^{\frac{1}{75}t} = \int 4\, e^{\frac{1}{75}t}\, dt + C = 4 \times 75 \times e^{\frac{1}{75}t} + C$$

$$N(t) = 300 + Ce^{-\frac{1}{75}t}$$

بما أن : $N(0) = 20$ فإننا تتحصل على $20 = N(0) = 300 + Ce^0$ ، أي أن $C = -280$

فنستنتج :

$$\boxed{N(t) = 300 - 280.\, e^{-\frac{1}{75}t}}$$

Solution Exercise 8 :

المعادلة التفاضلية (23.1) الممثلة لتوزيع RC في الدارة الكهربائية هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى :

$$\boxed{R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q = E(t)} \qquad (23.1)$$

بحيث:

R=200 Ohms, C=10^{-4} Farads, E(t) = 100 Volts

ومنه

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{200}10^{4}q(t)=\frac{1}{2} \qquad .(24.1)$$

باستعمال معامل التكامل (المعادلة (35.1) في الملحق التوضيحي) نحسب حل المعادلة (24.1) :

$$e^{\int 50dt} = e^{50t}$$

نجد:

$$q(t)e^{50t} = \frac{1}{2}\int e^{50t}dt + C$$

$$q(t)=\frac{1}{100}+Ce^{-50t}$$

$$q(0)= 0 = \frac{1}{100}+Ce^{0}$$

$$C = -\frac{1}{100}$$

$$q(t)=\frac{1}{100}-\frac{1}{100}e^{-50t}$$

بما أن قيمة $i(t)$ شدة التيار الكهربائي تكون بدلالة تغير الشحنة الكهربائية $dq(t)$ بالنسبة لتغير الزمن dt فإن :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=0-(-50t)\frac{1}{100}e^{-50t}$$

ومنه

$$\boxed{\begin{aligned} q(t)&=\frac{1}{100}-\frac{1}{100}e^{-50t}\\ i(t)&=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2}e^{-50t}\end{aligned}}$$

Solution Exercise 9:

الدارة الكهربائية LRC يمكن تمثيلها بالمعادلة (25.1) :

(25.1) $$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{l}{C}q(t)=V(t)}$$

بحيث: L=1, R=300, C=5x10-5, V(t)=40

ومنه

$$\frac{l}{C}=\frac{1}{5\times 10^{-5}}=\frac{10^5}{5}=\frac{10}{5}\times 10^4=2\times 10^4=20000$$

بالتعويض في (25.1) تحصل على المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة بمعاملات ثابتة (26.1).

(26.1) $$\frac{d^2q}{dt}+300\frac{dq}{dt}+20000q=40$$

حلها العام $q(t)$ يحقق الشروط الابتدائية :

(27.1) $$q(0)=i(0)=\frac{dq}{dt}=0$$

المعادلة المساعدة الموافقة لـ (26.1) تكتب على الشكل:

$$m^2+300m+20000=0$$

التي جذراها هما: $m_1=-100,\ m_2=-200$ ومنه الحل المتجانس لـ (26.1) هو:

$$q_h(t)=c_1e^{-100t}+c_2e^{-200t}$$

بما أن $E(t)$ قيمة ثابتة ، نستعمل طريقة المعاملات غير المحددة لاستنتاج حل خاص ثابت $q_p(t)=C$ يحقق (26.1)

أي أن: $$0+300\times 0+20000\times C=40\Rightarrow q_p(t)=C=\frac{40}{20000}=\frac{4}{2000}=\frac{2}{1000}=2\times 10^{-3}$$

ومنه تحصل على الحل العام

(28.1) $$q_g(t)=q_h(t)+q_p(t)=c_1e^{-100t}+c_2e^{-200t}+0.002$$

باستعمال الشرطين الابتدائيين (27.1) وبالتعويض في المعادلة (28.1) نستنتج :

(29.1) $$c_1+c_2+0.002=0$$
$$-100c_1-200c_2=0$$

نحل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين $c_1,\ c_2$ (29.1) :

$$\begin{cases}c_2=+0.002\\ c_1=-0.004\end{cases}$$

باتعويض في (28.1) نحصل على:

$$\boxed{\begin{aligned}&q(t)=0.002\left(-2e^{-100t}+e^{-200t}+1\right)\\ &i(t)=\frac{dq}{dt}=0.4\left(e^{-100t}-e^{-200t}\right)\end{aligned}}$$

4 ملحق توضيحي

4.1 تصنيف المعادلات التفاضلية

Equation	Type
$\frac{dy}{dt} = m$	**Linear Ordinary Differential Equation** معادلة تفاضلية عادية خطية (حل تآلفي خطي)
$\frac{dy}{dt} = m \cdot y(t)$	**First-Order Separable ODE** خطية من الرتبة الأولى قابلة للفصل (حل أسي)
$\frac{dy}{dt} + a(t)y(t) = b(t)$	**First-Order non separable ODE** غير قابلة للفصل (حل لوجستي)
$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$	**Second-Order Linear ODE** خطية من الرتبة الثانية (حل مثلثي)
$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	**First-Order Linear Partial Differential Equation (PDE)** معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى معادلة النقل أحادية البعد مع سرعة ثابتة **Advection equation**
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	**Second-Order Linear Hyperbolic (Wave Equation)** المعادلة الزائدية للموجة الأحادية الأبعاد (صوتية أو ضوئية)
$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	**Second-Order Linear Parabolic PDE (Heat Equation)** المعادلة المكافئة للانتقال الحراري الأحادية الأبعاد
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	**Second-Order Linear Elliptic PDE (Harmonic Laplace Equation)** معادلة لابلاس الناقصية المتجانسة للانتشار الموجي والتوصيل الحراري في ثلاثة أبعاد

4.2 طريقة معامل التكامل لحل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة 1

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y(t) = b(t) \tag{30.1}$$

1. إيجاد معامل التكامل μ للمعادلة (30.1) :

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} \tag{31.1}$$

2. اضرب كلا جانبي المعادلة الأصلية (30.1) في معامل التكامل (31.1) :

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y(t) = \mu(t)b(t) \tag{32.1}$$

3. على الجانب الأيسر من المعادلة (32.1)، يمكننا استخدام قاعدة اشتقاق جداء دالتين :

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)b(t) \tag{33.1}$$

4. قم بتكامل كلا جانبي المعادلة (33.1) بالنسبة إلى t:

$$\int \frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right)dt = \int \mu(t)b(t)dt \tag{34.1}$$

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)b(t)dt + C \tag{35.1}$$

5. اقسم كلا الجانبين من المعادلة (35.1) على معامل التكامل لإيجاد الحل العام :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)dt + C\right)}$$

4.3 حل المعادلة التفاضلية اللوجستية

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{L}\right)$$

حيث:

- $P(t)$ يمثل حجم السكان في الزمن t .
- r هو معدل النمو.
- L هو القدرة الاستيعابية (أقصى حجم للسكان).

لنقم بحل هذه المعادلة التفاضلية باستخدام الشرط الابتدائي $P(t_0) = P_0$ ، حيث P_0 هي قيمة الحجم الابتدائي للسكان عند الزمن الإبتدائي t_0

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{L}\right)$$

$$\int_{t_0}^{T} dP \frac{1}{P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{L}\right)} = \int_{t_0}^{T} r\,dt$$

$$\ln\left|\frac{P(T)}{L - P(T)}\right| - \ln\left|\frac{P(t_0)}{L - P(t_0)}\right| = r(T - t_0)$$

$$\frac{P(T)}{L - P(T)} = \left(\frac{P(t_0)}{L - P(t_0)}\right)e^{r(T - t_0)} = Ae^{r(T - t_0)}$$

$$P(T) = \frac{L}{1 + A^{-1}e^{-r(T - t_0)}}$$

$$P(T) = \frac{AL}{A + e^{-r(T - t_0)}}$$

$$P(T) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L - P(t_0)}{P(t_0)}\right)e^{-r(T - t_0)}}$$

ومنه الحل النهائي المختصر:

$$\boxed{P(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L - P_0}{P_0}\right)e^{-r(t - t_0)}}}$$

الذي يصف النمو السكاني مع مرور الزمن، ابتداءً من حجم السكان الابتدائي P_0 ، بمعدل النمو r ، ويصل إلى القدرة الاستيعابية L .

المراجع :

[1] Google AI. Bard: A large language model, 2024. Available at https://gemini.google.com/app, free version 1.0 Pro.

[2] Open AI. Chatgpt: A large language model, 2022. Available at https://chat.openai.com, free version 3.5.

[3] A. H. Siddiqi and P. Manchanda. A First Course in Differential Equations with Applications. CRC Press, 2006.